



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

**Universidad del Perú. Decana de América**

**Facultad de Ciencias Físicas**

**Escuela Profesional de Física**

**El efecto Coriolis en la propagación del maremoto de  
Chile del 2010**

**TESIS**

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Física

**AUTOR**

Juan Pablo Alberto AVALOS CARRIÓN

**ASESOR**

Mg. César Omar JIMÉNEZ TINTAYA

Lima, Perú

2019



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

## Referencia bibliográfica

---

Avalos, J. (2019). *El efecto Coriolis en la propagación del maremoto de Chile del 2010*. [Tesis de pregrado, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Físicas, Escuela Profesional de Física]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

---



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**  
Universidad del Perú. Decana de América

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS**

**ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA**

**ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL  
TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN FÍSICA**

Siendo las 18:00 horas del viernes 08 de febrero del 2019, en el Salón de Grados de la Facultad de Ciencias Físicas (Auditorio 109), bajo la Presidencia del Dr. Raúl Félix Carita Montero (Presidente), Lic. Luis Vilcapoma Lázaro (Miembro), Mg. César Omar Jiménez Tintaya (Asesor), Lic. Humberto Martín Calvo Chia (Co-Asesor) y, el Lic. Miguel Fidencio Saavedra Juan de Dios (Suplente), se dio inicio a la Sesión Pública de Sustentación de Tesis para la Licenciatura en Física, mediante la Modalidad M1, del Bachiller:

**AVALOS CARRIÓN, JUAN PABLO ALBERTO**

Dando lectura al Resumen del Expediente, el Presidente del Jurado, invitó al Bachiller Avalos Carrión, Juan Pablo Alberto a realizar una exposición de Trabajo de Tesis titulada: "El Efecto Coriolis en la propagación del maremoto de Chile del 2010".

Concluida la exposición del candidato y luego de las preguntas de rigor por parte del Jurado, el Presidente, invitó al Bachiller y al público a abandonar momentáneamente la Sala de Sesión, para dar paso a la deliberación y calificación por parte del Jurado.

Al término de la deliberación del Jurado el Dr. Raúl Félix Carita Montero, invitó al candidato y al público a pasar a la Sala de Sesión, para dar lectura al resultado de la deliberación. Ha obtenido la calificación de:

Muy bueno  
(MENCIÓN)

17  
(NÚMERO)

Diecisiete  
(LETRAS)


Finalmente, el Presidente del Jurado, propone al consejo de la Facultad que se le declare Licenciado en Física al Bachiller Avalos Carrión, Juan Pablo Alberto. Siendo las...12:00... Horas, se levanta la Sesión.

  
**Dr. Raúl Félix Carita Montero**  
PRESIDENTE

**Lic. Luis Vilcapoma Lázaro**  
MIEMBRO

  
**Mg. César Omar Jiménez Tintaya**  
ASESOR

  
**Miguel Fidencio Saavedra Juan de Dios**  
SUPLENTE

  
**Lic. Humberto Martín Calvo Chia**  
CO-ASESOR

# El Efecto Coriolis en la Propagación del Maremoto de Chile del 2010

# Dedicatoria

A mis padres por su apoyo y ser el pilar fundamental de todo lo que soy.

# Agradecimientos

Expreso mi agradecimiento al Mg. César Jimenéz Tintaya por su labor de mentor y asesoría a lo largo del desarrollo y redacción del presente trabajo.

Agradezco al Lic. Martín Calvo Chia por su labor de mentor y asesoría en los fundamentos de los métodos numéricos aplicados en el presente trabajo.

Agradezco a la DHN (Dirección de Hidrografía y Navegación) por la oportunidad de haber laborado en el departamento de Oceanografía, laborar en el departamento del CNAT (Centro Nacional de Alerta de Tsunamis) y participar en los simposios de Alerta de Tsunamis organizados por el ITIC (International Tsunami Information Center).

# Índice general

1. Introduccion	1
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	2
1.3. El terremoto y maremoto de Chile del 2010 . . . . .	2
2. Fundamento Teorico	4
2.1. Conceptos Fundamentales de Maremotos . . . . .	4
2.1.1. Cerca a la costa . . . . .	6
2.1.2. Velocidad de las partículas de agua . . . . .	7
2.1.3. Incremento de la altura de ola . . . . .	9
2.2. Generacion de un maremoto . . . . .	10
2.3. Propagacion de un maremoto . . . . .	13
3. Metodología	17
3.1. Modelado numérico . . . . .	17
3.2. Área de estudio . . . . .	17
3.3. Deformacion del suelo oceánico . . . . .	19
3.4. Propagacion . . . . .	26
4. Adquisicion y Procesamiento de Datos	29
5. Validacion y Resultados	33
5.1. Validación . . . . .	33
5.2. Resultados . . . . .	34
6. Conclusiones	40
6.1. Conclusiones . . . . .	40
6.2. Trabajo futuro . . . . .	41



A. Campo de deformacion cosísmico	42
A.1. Esfuerzo . . . . .	42
A.2. Deformación unitaria . . . . .	47
A.3. Relación lineal entre esfuerzo y deformacion unitaria . . . . .	49
A.4. Ecuación de movimiento . . . . .	51
A.5. Elastoestatica . . . . .	52
A.5.1. Campo de desplazamiento estatico debido a una sola fuerza . .	53
A.6. Dislocacion de Volterra . . . . .	56
A.7. Deformación superficial de Okada . . . . .	59
B. Ondas en el océano	62
B.1. Cinematica de ondas . . . . .	62
B.2. Ondas gravitacionales de superficie . . . . .	64
B.2.1. Condiciones de frontera . . . . .	66
C. Aguas someras. Maremotos	70
C.1. Condiciones de Frontera . . . . .	71
C.2. Aceleración de Coriolis . . . . .	74
D. Esquema del modelado numérico	77
D.1. Método de diferencias finitas . . . . .	77
D.2. Consistencia . . . . .	79
D.3. Convergencia . . . . .	80
D.4. Estabilidad . . . . .	81
D.5. Analisis de estabilidad . . . . .	83
D.6. Ecuaciones hiperbolicas . . . . .	84
D.7. La condicion de Courant-Friedrichs-Lewy . . . . .	85
D.8. Ecuaciones hipreolicas bidimensionales . . . . .	86
D.9. Dispersion . . . . .	86
D.9.1. Dispersión y disipación en ecuaciones diferenciales parciales . .	87
D.9.2. Dispersión y disipación en ecuaciones de diferencias . . . . .	88
E. Implementacion de la aceleracion de Coriolis	91

# Índice de figuras

2.1. Parametros de una onda . . . . .	5
2.2. Trayectoria de las masas de agua . . . . .	6
2.3. Altura de ola y batimetría . . . . .	7
2.4. Superficie de la ola y batimetría . . . . .	8
2.5. Modelo de generacion de las ondas de maremoto . . . . .	11
2.6. Parametros de una falla rectangular . . . . .	12
2.7. El vector velocidad angular . . . . .	15
2.8. Variación de $f \equiv 2\Omega \sin \phi$ con la latitud . . . . .	15
2.9. Aceleracion de Coriolis . . . . .	16
3.1. Área de estudio en coordenadas geograficas . . . . .	18
3.2. Área de estudio en proyeccion Azimutal Ortográfica . . . . .	18
3.3. Localizacion de las subfuentes en la proyeccion Azimutal Ortográfica .	19
3.4. Localizacion de las subfuentes dentro del dominio de simulacion . . .	19
3.5. Distribucion de las distancias de dislocacion . . . . .	21
3.6. Subfuentes . . . . .	21
3.7. Distribucion de las distancias de dislocacion. World Mercator . . . . .	22
3.8. Campo de deformación: Mapa de elevación . . . . .	22
3.9. Campo de deformación: Curvas de nivel . . . . .	23
3.10. Subfuentes dentro del dominio de simulacion . . . . .	23
3.11. Vista superior del campo de deformacion . . . . .	24
3.12. Vistas del campo de deformacion . . . . .	25
3.15. Propagacion . . . . .	27
3.16. Propagacion: representación de baja resolucion . . . . .	28
3.17. Propagacion a las 2:05 horas, 4:10 horas y 8:20 horas en la simulación	28
4.1. Estaciones DART . . . . .	30
4.2. Series de tiempo DART sin filtrado . . . . .	31
4.3. Series de tiempo DART filtradas . . . . .	32

5.1. Validación: Descripción . . . . .	36
5.2. Mareogramas virtuales . . . . .	37
5.3. Influencia del término de Coriolis en la propagación. Hemisferio sur .	38
5.4. Influencia del término de Coriolis en la propagación. Zona ecuatorial .	39
A.1. Cuerpo elástico homogéneo en equilibrio estático . . . . .	44
A.2. Vector tracción y sus componentes . . . . .	45
A.3. Tensor esfuerzo . . . . .	46
B.1. Ondas gravitacionales de superficie . . . . .	66

# Índice de tablas

3.1. Localizacion, D (slip) y H (profundidad) de las subfuentes que simulan la fuente sísmica del maremoto de Chile del 2010 . . . . .	20
5.1. Correlacion con las series de tiempo de las estaciones DART . . . . .	34

# Resumen

Las trágicas consecuencias del impacto de los maremotos motiva las investigaciones en este campo. En el presente trabajo se estudia la influencia de la aceleración de Coriolis en la propagación de un maremoto. La fuerza “aparente” de Coriolis surge en los cuerpos en movimiento respecto a la Tierra considerada como un sistema de referencia no inercial.

En el estudio de la influencia del término de Coriolis sobre la propagación de las ondas de maremoto, se emplea el modelo numérico TUNAMI, el cual considera las ecuaciones de propagación de ondas en coordenadas esféricas sin incluir el término de Coriolis. Este término se ha implementado mediante una subrutina en los códigos de programación del modelo numérico.

La versión resultante del modelo se verifica para el escenario del maremoto de Chile del 27 de febrero del 2010, ocurrido a las 06:34 UTC. El cual impactó severamente la costa central de Chile.

Los resultados muestran que la influencia de la aceleración de Coriolis es mayor en zonas de bajas profundidades que en batimetrías profundas.

# Abstract

The tragic tsunami consequences stimulate research in this field. The Coriolis acceleration influence in tsunami propagation is studied in the present work. The Coriolis “apparent” force originates because of moving bodies respect to Earth which is considered as a noninertial frame of reference.

The TUNAMI numerical model, that considers wave propagation equations in spherical coordinates without Coriolis, is applied to study the Coriolis term influence in the propagation of tsunami waves by including it via a subroutine at the programming code of the numerical model .

The implemented model version is verified at the 27th February 2010 Chile Tsunami scenario, occurred at 06:34 GMT. It impacted severely the central coast of Chile.

It is concluded that Coriolis acceleration influences more the propagation at shallow depth than at deep depth.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

La descripción de maremotos es de gran importancia debido a los efectos negativos de este fenómeno en las zonas costeras. Los primeros estudios en el Perú en la modelización numérica de maremotos se deben al Lic. Manuel Sullon (Sullón 2007). La generación de maremotos involucra grandes cantidades de energía (en el maremoto del Callao de 1746, la energía calculada es  $1.99 \times 10^{18} \text{J}$ , fue el equivalente a unas 36 718 bombas nucleares de Hiroshima, [Jiménez, 2015](#)). Luego, esta energía viaja grandes distancias en los océanos (propagación). En el presente trabajo se estudia la influencia de la aceleración de Coriolis en la propagación de ondas para el caso del maremoto de Chile del 2010.

Podemos referirnos a tres estudios sobre el efecto de la fuerza de Coriolis en maremotos transoceánicos. Uno de ellos es el de [Imamura y Shuto, 1989](#) quienes simularon el maremoto de Chile de 1960, con y sin los términos de Coriolis. Sus resultados mostraron diferencias en alturas de ola pero no mucha diferencia en tiempo de arribo. [Kowalik y Murty, 1989](#) concluyeron que la fuerza de Coriolis tiene poca influencia en ondas de periodos bajos, pero una diferencia distintiva en las amplitudes observadas en las ondas de grandes periodos. El siguiente estudio es el de [Dao y Tkalich, 2007](#), quienes modificaron el modelo de propagación TUNAMI-N2, el cual está desarrollado en coordenadas cartesianas, formulándolo en coordenadas esféricas y con los términos de Coriolis con el fin de considerar la curvatura de la Tierra para el caso de maremotos transoceánicos. El área de estudio corresponde al del maremoto del Océano Índico del 2004. Concluyeron que el efecto de la fuerza de Coriolis es pequeño, un ligero cambio en la amplitud de onda fue apreciado en aguas profundas.

## 1.2. Objetivos

El objetivo principal es determinar la influencia de la aceleración de Coriolis en la simulación numérica de la propagación de un maremoto, tomando como escenario el maremoto de Chile del 27 de febrero del 2010. Considerando el modelo numérico TUNAMI como base.

Los objetivos específicos son:

- Determinar la relación entre la velocidad de las partículas de agua, la batimetría y el parámetro de Coriolis en la propagación de un maremoto.
- Verificar la obtención de una mayor correlación de las magnitudes simuladas y observadas al incluir la aceleración de Coriolis, en zonas de batimetría profunda.

## 1.3. El terremoto y maremoto de Chile del 2010

Chile se ubica al suroeste de América del sur. Su territorio limita al norte con Perú, al este con Bolivia y Argentina, al sur con la Antártida y al oeste con el Océano Pacífico. Chile se ubica en la zona llamada Cinturón Sísmico del Pacífico, que rodea los países bañados por el Océano Pacífico, una de las regiones más sísmicas del planeta.

Según el censo del 2002, el 85 % de la población total de Chile reside en sectores urbanos, los cuales se encuentran cerca a las costas.

Desde finales del siglo XVI hasta hoy, un sismo de magnitud 8 Mw ha ocurrido en promedio cada 10 años en algún lugar del territorio chileno. Según el Instituto de Geofísica de la Universidad de Chile, estadísticamente se produce un sismo destructor cada 10 años y un promedio de diez pequeños temblores diarios.

En la madrugada del sábado 27 de febrero del 2010, a las 3:34 hora local en Chile, se produjo un terremoto de 8,8 Mw el cual generó un maremoto que impactó la costa central de Chile, dejando 521 víctimas fatales y 2 millones de damnificados, según el Resumen Ejecutivo del Gobierno de Chile del 27 de agosto del 2010. Según la [OPS, 2010](#), los eventos afectaron regiones con el 80 % de la población nacional, cerca de 13 millones de personas, causando 512 muertos, 16 desaparecidos y 800 mil personas



damnificadas. La mayor cantidad de fallecidos fue debido al maremoto. Este terremoto es el segundo más fuerte en la historia de Chile, y uno de los cinco mas potentes registrados en el mundo. Según el Instituto Sismológico de la Universidad de Chile, el terremoto originó que la costa chilena se desplace hacia el Pacífico, por lo que el territorio chileno aumentó 1 200 metros cuadrados. Este sismo abrió una ruptura en el suelo visible a lo largo de 500 kilometros de costa, existiendo desniveles en el suelo de 1 a 1.25 metros.

Se generó una alerta de maremoto en el Pacífico que se extendió a 53 países incluidos Perú, Ecuador, Colombia, Panama, Nueva Zelandia y la costa de Hawai.

# Capítulo 2

## Fundamento Teórico

### 2.1. Conceptos Fundamentales de Maremotos

Un maremoto es descrito como un conjunto de ondas gravitacionales de superficie, las cuales tienen periodos entre  $10^2$  y  $10^4$  s. En la Figura 2.1 se representan ondas sinusoidales de una sola frecuencia en una región del océano y los parametros de una onda. El suelo marino se muestra en color azul oscuro. En el océano, una elevación de la superficie da origen a estas ondas. Las causas mas comunes de esta elevación son de origen sísmico, con una dimension horizontal de ruptura  $L \sim 100$  km la cual excede la dimension de profundidad de los océanos, de  $H \sim 4$  km. Las ondas así generadas tienen longitudes de onda  $\lambda$  del orden de la dimension de la fuente sísmica (Levin y Nosov, 2009). Así se tiene la relacion  $\lambda \gg H$ , descrita con la aproximacion de aguas someras, Shallow Water (Holton, 2004).

En aguas someras las ondas son no dispersivas, es decir la frecuencia angular  $\omega$  no depende del número de onda  $k$ , por lo cual la velocidad de fase  $v_{\text{fase}} = \omega/k$  y la velocidad de grupo  $v_{\text{grupo}} = \partial\omega/\partial k$  coinciden, y tenemos para la velocidad de fase, es decir rapidez de propagacion del maremoto (la cual es diferente a la velocidad de las partículas de agua, las cuales se describen en las ecuaciones del apéndice (B.43), (B.44) y (B.45))

$$v = \sqrt{gh} \quad (2.1)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $h$  es la profundidad en el punto de la superficie donde se calcula la rapidez de propagacion del maremoto. Con  $g=9.8 \text{ m/s}^2$  y considerando el valor característico de  $h=4000$  m, tenemos una rapidez de unos  $198 \text{ m/s}$  (Levin y Nosov, 2009), pudiendo recorrer unos  $12 \text{ km}$  en un minuto (unos  $6$  minutos de arco en coordenadas geográficas), o alrededor de  $1$  grado geografico en

10 minutos.

Al aproximarse a la costa ([Arnott, 2010](#) y [Salmon, 2016](#)), la amplitud de onda del maremoto se incrementa debido a la disminución de la profundidad del océano. Este incremento es lo que determina el peligro en las zonas costeras. El riesgo que representan los maremotos está relacionado con: la inundación en zonas cercanas a la costa, el impacto de las ondas en las construcciones y la erosión.

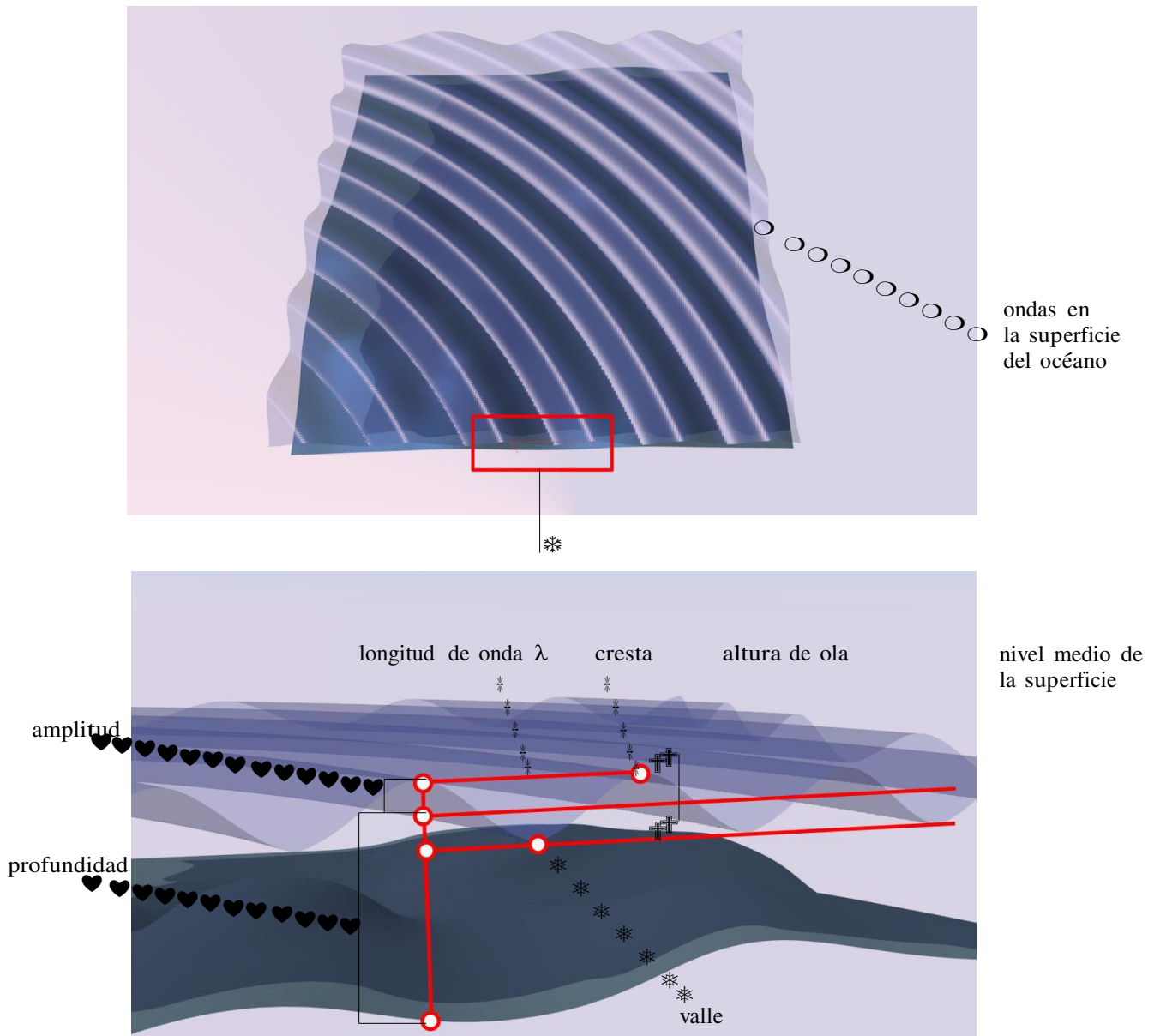


Figura 2.1: Parámetros de una onda. Aumento de la región resaltada vista cercana a la superficie, donde se aprecian las ondas y el suelo marino (elaboración propia).

**Movimiento de las masas de agua** Las masas elementales del fluido en la superficie, las partículas de agua, siguen una trayectoria ovalada como se observa en la Figura 2.2, en la cual notamos que

- En la cresta la dirección de la masa elemental coincide con la de propagación de la ola. En el valle la dirección de la masa elemental es opuesta a la dirección de propagación de la ola.
- La trayectoria es mayor en la ola de menor profundidad.

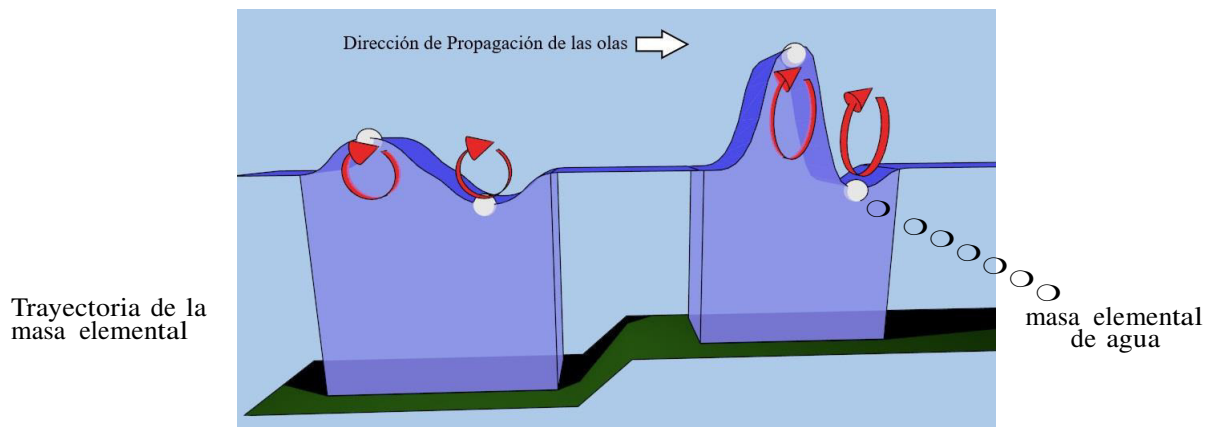


Figura 2.2: El esquema muestra la trayectoria de las masas de agua. Las esferas blancas representan la masa elemental y las flechas representan su trayectoria (elaboración propia).

### 2.1.1. Cerca a la costa

La descripción de ondas en aguas someras indica que la velocidad de propagación depende de la profundidad  $v = \sqrt{gh}$ . Al acercarse a la costa la profundidad disminuye por lo que la velocidad también disminuye. Además en la costa tenemos:

- Si no hay presencia de fuentes ni sumideros la frecuencia  $f$  de las olas es constante, y la relación

$$v = \lambda f \quad (2.2)$$

indica que la longitud de onda disminuye con la velocidad.

- Al considerarse constante la densidad del agua, el volumen de fluido desplazado debe mantenerse constante.

Con lo mencionado podemos concluir que al acercarse las olas del maremoto a la costa, la longitud de onda disminuye y para mantener el volumen constante la ola

incrementar su altura (la altura de la ola es la componente vertical de la distancia entre la cresta y el valle).

En la Figura 2.3 se observa el volumen  $V$ , el cual para mantenerse constante ante la reducción de la profundidad y del largo ( $\lambda$ ), solo le queda aumentar su altura. Cabe recordar que la masa de agua no se desplaza de la región I a la II. Para explicarlo, si imaginamos columnas de agua, en su desplazamiento oscilatorio una columna desplaza a la que está a su lado, y esta a la siguiente, así consecutivamente.

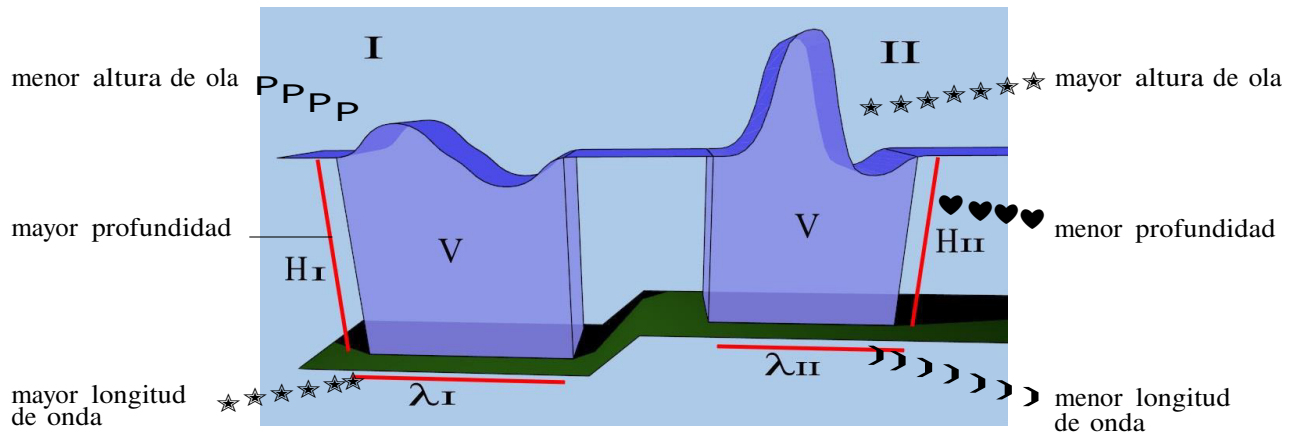


Figura 2.3: El esquema muestra las regiones de diferente profundidad I y II. Donde  $H_I > H_{II}$  y  $\lambda_I > \lambda_{II}$  y por conservación de la masa la altura de la ola es mayor en la región II (elaboración propia).

### 2.1.2. Velocidad de las partículas de agua

La rapidez de propagación de las ondas de maremoto, dentro de un medio compuesto de partículas de agua, es diferente a la velocidad de estas partículas de agua, las cuales siguen una trayectoria oscilatoria que depende de la forma de la ola. Si se tienen dos alturas de ola, una mayor y una menor:

- A la ola de mayor altura le corresponde una longitud de curva  $S_M$  en la superficie, y a la ola de menor altura le corresponde  $S_m$ . Siendo las longitudes de curva  $S_M > S_m$ .
- La frecuencia es constante, por un punto pasan las olas en un mismo tiempo  $t_0$ , ya sean de altura pequeña o grande.

Al considerar las partículas de agua, concluimos que en una ola de mayor altura, deben recorrer una longitud de curva  $S_M$  en  $t_0$  y que en una ola de menor altura, deben recorrer una longitud de curva  $S_m$  en  $t_0$ . Por tanto:

- La rapidez de las partículas de agua es mayor en las olas de mayor altura.

Cerca a las costas las olas incrementan su altura, por lo cual:

- La rapidez de las partículas de agua es mayor en las olas cercanas a la costa.

Esto se verifica con las ecuaciones del apéndice (B.42), (B.43), (B.44) y (B.45). En batimetría profunda con  $H_1 = 4000$  m,  $\eta = 0.2$  m,  $z = 0.2$  m y  $\lambda = 100$  km tenemos la velocidad  $u_1 = 0.0108$  m/s. En batimetrías cercanas a la costa con  $H_2 = 1000$ ,  $\eta = 1.0$  m,  $z = 1.0$  m y  $\lambda = 100$  km tenemos la velocidad  $u_2 = 0.0544$  m/s. Donde  $H$  es la profundidad del océano,  $\eta$  es la perturbación del nivel medio de la superficie,  $z$  es la coordenada vertical siendo el nivel medio de la superficie  $z = 0$  y  $\lambda$  es la longitud de onda.

En la Figura 2.4 se representa la longitud de la trayectoria referencial con una banda blanca. La banda que corresponde a la ola en la menor profundidad tiene mayor longitud.

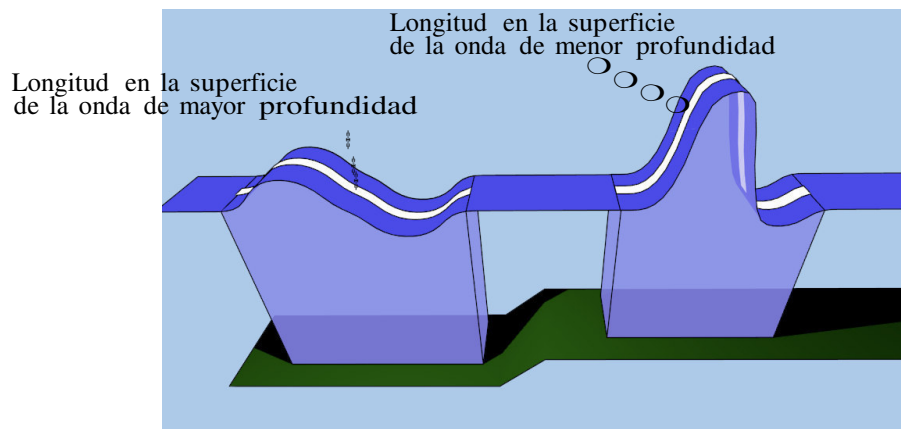


Figura 2.4: El esquema muestra la longitud de una curva en la superficie que es proporcional al recorrido de una partícula sobre la superficie para olas a diferentes profundidades. En la ola de la región de menor profundidad la longitud del recorrido es mayor (elaboración propia).

### 2.1.3. Incremento de la altura de ola

En las ecuaciones de aguas someras integradas del apéndice (C.14), (C.15) y (C.16) realizamos la simplificación al caso unidimensional, poniendo  $N = 0$  y  $\eta = \eta(x)$ . Con lo cual se puede mostrar que

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = H \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

con esto a  $M$  le podemos dar forma de una función seno o coseno. En la variable espacial  $\eta$ , perturbación del nivel medio de la superficie, tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial t} \approx -H \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\eta(x, t) \propto \frac{1}{H} \cos(x, t) \quad (2.5)$$

donde  $H$  es la batimetría. Lo cual muestra que cerca a la costa  $\eta$  aumenta.

Con la aceleración de Coriolis, en las ecuaciones de aguas someras integradas del apéndice (C.29), (C.30) y (C.31) realizamos las simplificaciones al caso unidimensional considerando una simetría en las dos direcciones espaciales, nos quedamos con (C.30) donde reemplazamos  $M$  en lugar de  $N$

$$-\frac{1}{g(\eta + H)} \frac{\partial M}{\partial t} + f \frac{M}{g(\eta + H)} \approx \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.6)$$

donde el sumando  $f \frac{M}{gH}$  representa el efecto Coriolis

$$f \frac{M}{g(\eta + H)} = f \frac{\bar{u}(\eta + H)}{g(\eta + H)} = f \frac{\bar{u}}{g} \quad (2.7)$$

Esta expresión se encuentra en la solución numérica y nos indica que en la propagación de ondas de maremoto:

- El parámetro de Coriolis influye en  $\eta$  mediante su multiplicación con la velocidad de las partículas de agua.

Se distinguen tradicionalmente los siguientes procesos en un maremoto: generacion de las ondas, su propagacion en el océano y, a su arribo a la costa, la inundación que causan.

## 2.2. Generacion de un maremoto

Los maremos de origen sismotectonico son los de mayor probabilidad de ocurrencia. El campo de deformación cosísmico causa una deformacion de la superficie del océano, estableciendo así la perturbacion inicial que dar lugar a la formacion del maremoto. La superficie del océano se ve deformada como consecuencia de una elevacion del fondo marino repentinamente, en un tiempo tal que se considera que esta elevacion se transmite sin cambios a la superficie del océano. Se hace analogia a un émbolo (Jiménez, 2015). Estos pasos estan representados en la Figura 2.5. No todos las elevaciones del fondo marino por sismo causan maremos. Definimos el momento sísmico (Aki, 1966) como:

$$M_0 = \mu SD \quad (2.8)$$

donde  $\mu$  es el módulo de rigidez de la zona de ruptura,  $S$  es el area de la superficie de ruptura y  $D$  es la dislocacion (ver Figura 2.6). Ya es probable la presencia de un maremoto (Talandier, 1993) para valores de  $M_0 > 10^{20}$  Nm y para valores de  $M_0 > 2 \times 10^{22}$  Nm se desarrollan maremos destructivos. El momento sísmico del terremoto de Chile del 2010 es de  $1,7 \times 10^{22}$  (Fujii y Satake, 2012).

La representacion matematica del campo de deformacion sísmico es resultado del campo de desplazamiento debido a una dislocación de Volterra, el cual se basa en la teoría de deformacion en solidos (Apéndice A).



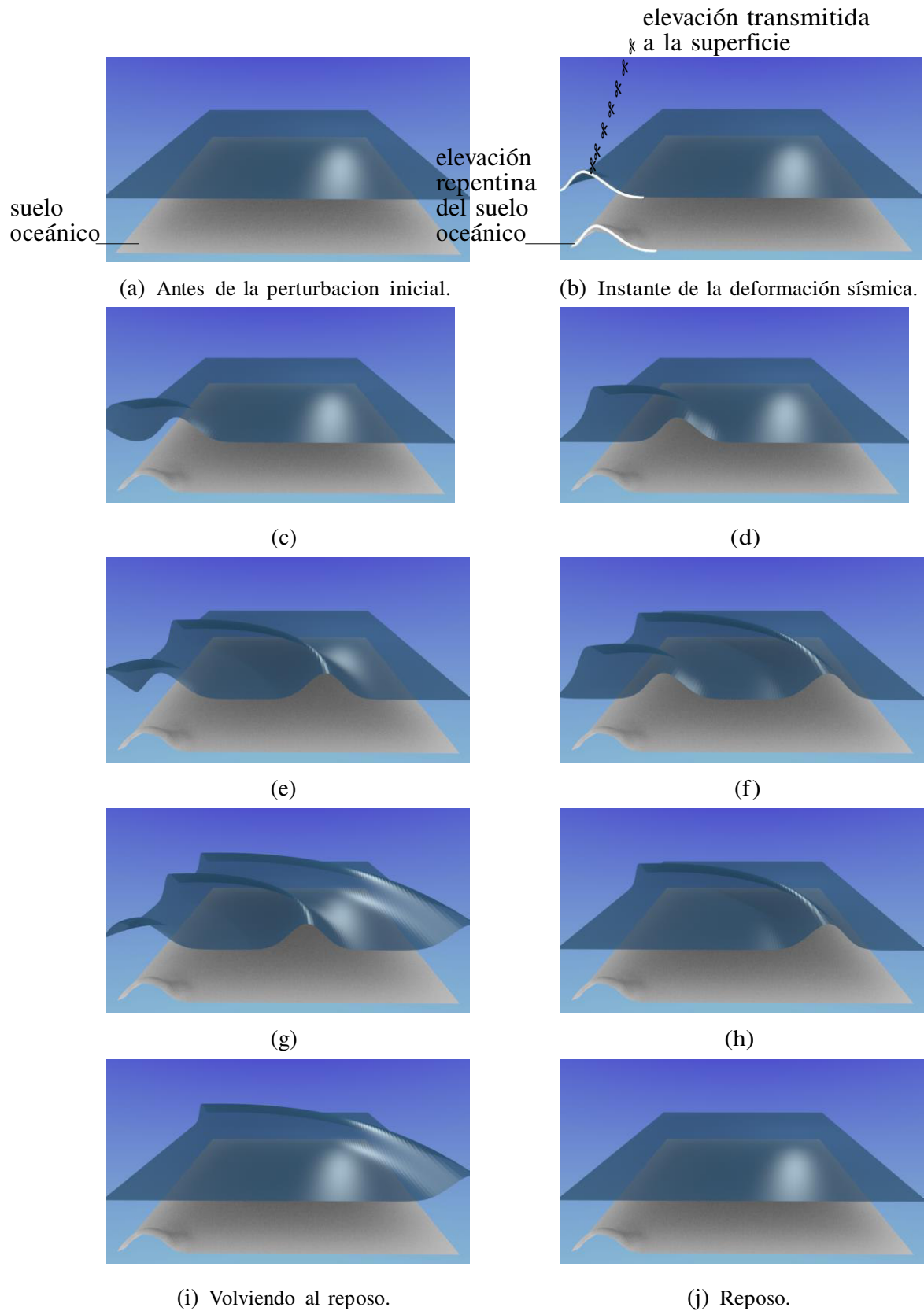


Figura 2.5: Modelo de generacion de las ondas de maremoto. En (2.5a) la superficie del océano está en reposo, luego (2.5b) se produce la elevación del suelo oceánico la cual se transmite a la superficie instantaneamente y sin distorsiones. Por acción de la aceleración de la gravedad esta perturbacion se desplaza en la superficie (2.5c hasta 2.5i) y luego de un tiempo se alcanza el reposo inicial (elaboracion propia).

La formulación de Okada ([Okada, 1992](#)) es usada para el calculo del campo de deformacion. Se basa en las siguientes consideraciones:

- La region de la falla es rectangular, definida por los siguientes parametros, en el bloque de suelo inferior (Figura 2.6)

H: profundidad de la falla La profundidad del borde superior. En la Figura 2.6 tenemos que el punto A se encuentra en el borde superior.

L: longitud de la falla En la direccion azimutal.

W: ancho de la falla La longitud de A hasta B.

D: distancia de dislocación (slip vector) El modulo del vector desplazamiento que en la Figura 2.6 tiene su origen en B.

$\phi$  : ángulo azimutal (strike) Medido desde el Norte ( $0^0 \leq \phi < 360^0$ ).

$\delta$  : ángulo de buzamiento (dip) ( $0^0 \leq \delta \leq 90^0$ )

$\lambda$  : ángulo de deslizamiento (rake) Ángulo entre la dirección azimutal y la distacia de dislocacion, en sentido antihorario ( $-180^0 < \lambda \leq 180^0$ ).

- Formula de Volterra ([Volterra, 1907](#)). La cual asume un medio homogéneo, isotropico, semi-infinito y como la única fuerza entre las partículas del medio a la fuerza elástica de Hooke, implicando la ausencia de la aceleración de la gravedad.

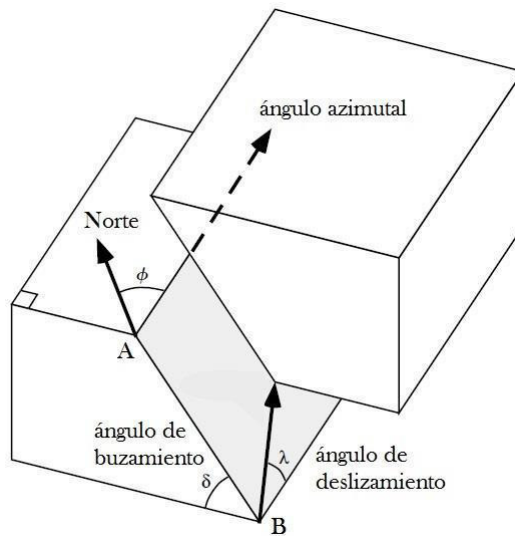


Figura 2.6: Parametros que definen una falla rectangular (modificado de [Shearer, 2009](#))

## 2.3. Propagacion de un maremoto

Los maremotos se clasifican según la distancia entre su lugar de origen y la costa (o el tiempo que tarda el maremoto en recorrer esta distancia) ([Jiménez, 2015](#))

**Maremotos locales** Cuando la distancia entre el área de generación y la costa es menor de 1000 km o cuando el tiempo de viaje es de menos de una hora.

**Maremotos lejanos** Cuando la distancia entre el área de generacion y la costa es mayor a 1000 km (a medio día o más de tiempo de viaje).

En los maremotos de origen lejano, la ecuacion de Boussinesq es considerada apropiada en la descripción de la propagacion de la perturbación inicial, dada por el campo de deformacion sísmico; sin embargo, en el modelado numérico, con los esquemas numéricos adecuados la teoria lineal de ondas largas viene a ser equivalente ([Goto y Ogawa, 1997](#)). El término lineal se refiere a la ecuación hidrodinámica ideal, la cual est linealizada, y el término ondas largas se refiere a la aproximacion de aguas someras, donde se considera que las longitudes de onda de las olas son grandes comparadas con la profundidad del océano (apéndices B y C). Las ecuaciones de esta teoria lineal de ondas largas son resueltas numéricamente por el modelo numérico TUNAMI ([Goto y Ogawa, 1997](#)).

**Aceleración de Coriolis** Las ecuaciones de propagacion de ondas están dadas por la conservacion de la masa y la conservacion de la cantidad de movimiento, la segunda ley de Newton. En un sistema de coordenadas en rotación junto con la Tierra, la segunda ley de Newton puede describir el balance de fuerzas sobre un cuerpo en reposo sobre la superficie, para esto debe incluirse una fuerza aparente, la fuerza centrífuga (la cual se combina con la fuerza de gravedad, de manera que podemos llamar fuerza gravitacional a la resultante de la verdadera fuerza gravitacional y la fuerza centrífuga, [Cushman y Marie, 2009](#)). Sin embargo, si el objeto est en movimiento sobre la superficie de la Tierra, se requiere una fuerza aparente adicional en la segunda ley de Newton, la fuerza de Coriolis. Las expresiones que describen las fuerzas en un sistema de coordenadas en rotacion surgen de la derivada temporal absoluta, donde absoluto indica que es referente a un sistema de coordenadas inercial:

$$D_a \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \Omega^2 \mathbf{R} \quad (2.9)$$

donde:

$D_a \mathbf{u}$  es la derivada temporal absoluta de la velocidad absoluta.

$\frac{d\mathbf{u}}{dt}$  es la derivada lagrangiana.

$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$  es la fuerza de Coriolis y  $\boldsymbol{\Omega}$  es el vector velocidad angular.

$\Omega^2 \mathbf{R}$  es la fuerza centrífuga y  $\mathbf{R}$  es un vector perpendicular al eje de rotación, con magnitud igual a la distancia al eje de rotación.

Sea un plano horizontal determinado con los vectores unitarios  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$  en dirección este y norte respectivamente. La aceleración de Coriolis se expresa como

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt}_{Co} = 2\Omega v \sin \phi = f v \quad (2.10)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt}_{Co} = -2\Omega u \sin \phi = -f u \quad (2.11)$$

Donde  $u$  es la velocidad en dirección este, y  $v$ , en la dirección norte,  $\Omega$  es la rapidez angular de rotación de la Tierra (Figura 2.7),  $\phi$  es la latitud y  $f \equiv 2\Omega \sin \phi$  es el parámetro de Coriolis. El subíndice Co indica que es la aceleración, parte de la aceleración total, debido solamente a la fuerza de Coriolis. Se observa que  $f$  en el ecuador es cero, y aumenta conforme nos acercamos a los polos (Figura 2.8).

Podemos combinar las ecuaciones, con la velocidad horizontal  $\mathbf{V} = (u, v)$  y un vector unitario en dirección radial (es decir vertical apuntando hacia afuera de la Tierra)  $\mathbf{k}$

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt}_{Co} = -f \mathbf{k} \times \mathbf{V}$$

Donde se observa que la fuerza de Coriolis es perpendicular a  $\mathbf{V}$ . La aceleración de Coriolis solo puede cambiar la dirección del movimiento, no la rapidez (Holton, 2004).

El número de Rossby  $R = U/Lf$  da una estimación de la influencia de la aceleración de Coriolis. Cuanto menor sea, mayor es la influencia de  $f$ . Para un maremoto local, la velocidad  $U$  en una onda es de unos 180 m/s y  $f \approx 2(7,3 \times 10^{-5})$  rad/s. Para la longitud  $L$ , notamos que si un maremoto tiene un periodo de 100 segundos y tarda unos 20 minutos en llegar a la costa, durante ese tiempo un frente de onda ha recorrido un equivalente a  $L = 12\lambda$ . Así tenemos el número de Rossby  $R \approx 1$ . Lo que nos dice que  $f$  no tiene mucha influencia, pero en maremos lejanos  $L$  es mayor, y  $R$  por tanto es menor, indicando una mayor influencia de  $f$ .

En cuanto a la magnitud y dirección de Co notamos que

- $f$  depende del seno de la latitud, por esto alcanza su máximo valor (del orden de  $10^{-4}$  rad/s) en el polo norte, es cero en el ecuador y tiene su mínimo valor en el polo sur (del orden de  $-10^{-4}$  rad/s). Como se muestra en la Figura 2.8.
- La dirección de  $\mathbf{C}_o$  es influenciada por el signo de  $f$ , el cual es positivo en el hemisferio norte y negativo en el hemisferio sur.
- La magnitud de  $\mathbf{C}_o$  es proporcional al área del paralelogramo formado por  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{V}$ , por lo cual es mayor cuanto mas cercano a  $90^\circ$  sea el ángulo que forman. Como se muestra en la Figura 2.9.

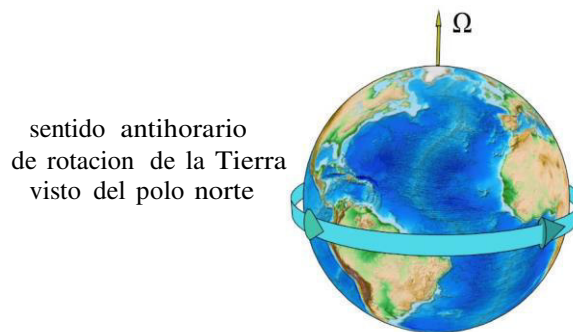


Figura 2.7: El vector velocidad angular,  $|\Omega| = 7,3 \times 10^{-5}$  rad/s, [Holton, 2004](#) (elaboración propia).

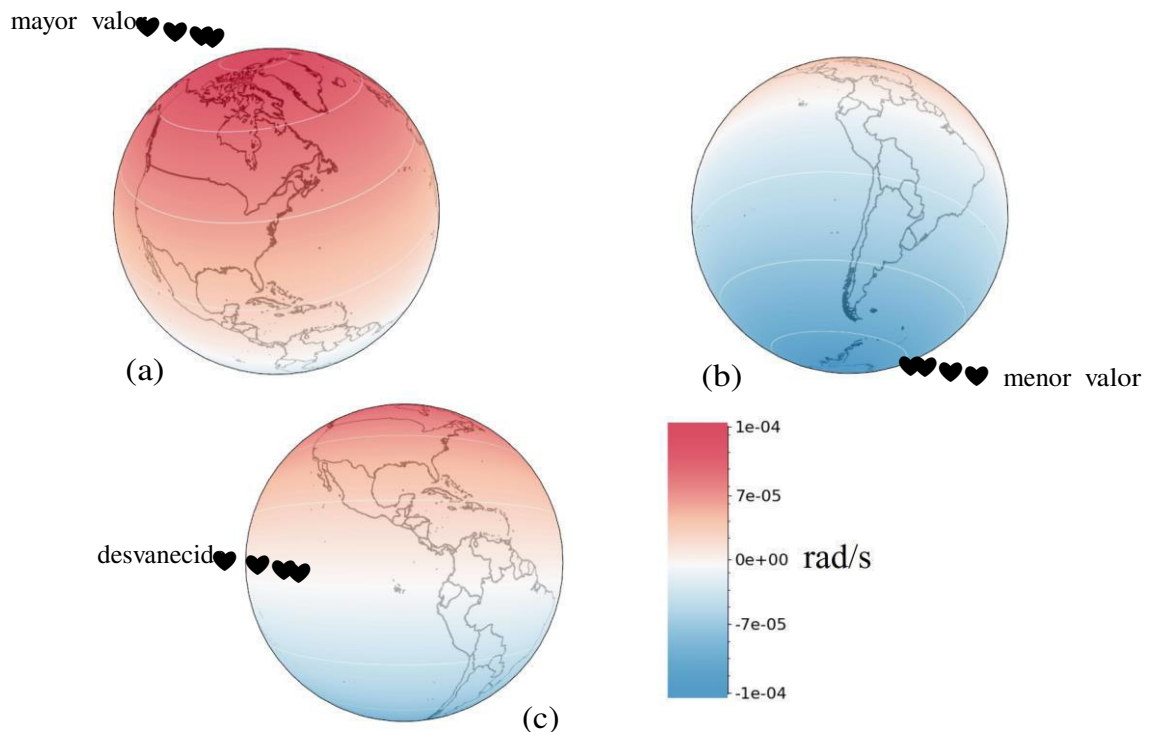
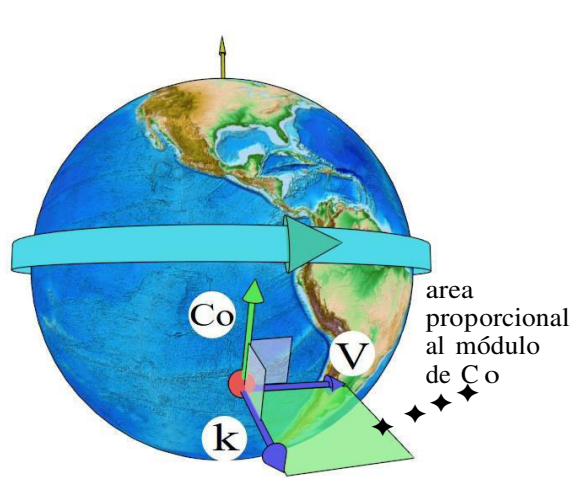
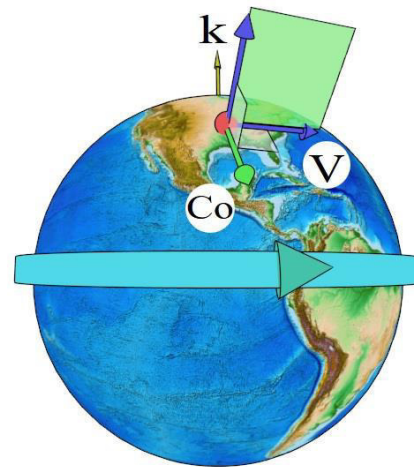


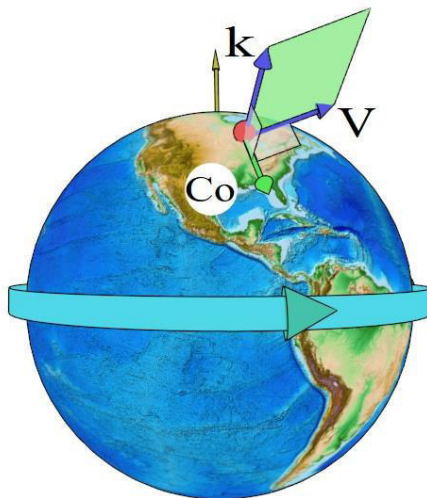
Figura 2.8: Variación de  $f \equiv 2\Omega \sin \phi$  con la latitud (elaboración propia).



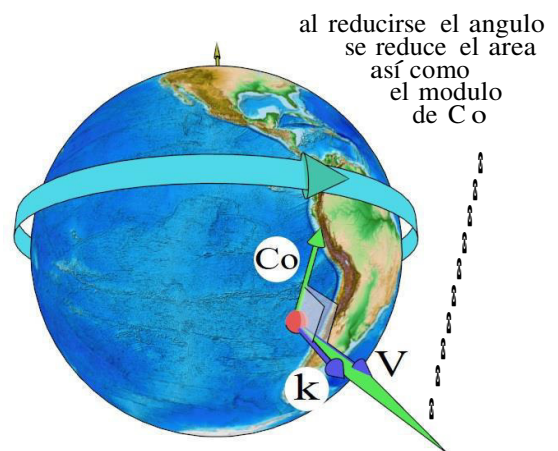
(a) Hemisferio sur  
 $\angle(k; V) = 90^\circ$



(b) Hemisferio norte  
 $\angle(k; V) = 90^\circ$



(c) Hemisferio norte  
 $\angle(k; V) : < 45^\circ; 90^\circ >$



(d) Hemisferio sur  
 $\angle(k; V) : < 0^\circ; 45^\circ >$

Figura 2.9: Se muestra la dirección de la aceleración de Coriolis para un cuerpo en el hemisferio sur, norte y con diferentes ángulos entre  $k$  (vector unitario en la vertical) y  $V$  (velocidad del cuerpo). El producto vectorial de  $k$  con  $V$  (ambos azules) (multiplicando con  $-f$ ) da un vector perpendicular a ambos  $Co$  (en verde), el cual es proporcional al área (en verde) formada por  $k$  y  $V$  (elaboración propia).

# Capítulo 3

## Metodología

### 3.1. Modelado numérico

El modelado numérico de la propagación de un maremoto involucra la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales correspondientes mediante alguna de las diversas técnicas numéricas (diferencias finitas, elementos finitos, volúmenes finitos, etc). El presente trabajo se basa en el modelo numérico TUNAMI construido con el método de las diferencias finitas ([Goto y Ogawa, 1997](#)). Los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales parciales, así como los métodos analíticos, dependen del tipo de ecuación, es decir elíptica, parabólica o hiperbólica. Cuando lo que se busca son valores numéricos de la solución, se pueden producir en menos tiempo por medio de los métodos numéricos en lugar de resolverlo analíticamente y luego evaluar la solución. En algunos casos la solución numérica es la única que puede lograrse.

El modelado numérico con diferencias finitas requiere la representación del área de estudio en grillas de cálculo y la división del tiempo transcurrido en niveles de tiempo. Por lo que se tiene una resolución espacial y una temporal, cuya elección depender del fenómeno físico que se desea simular, de manera que se satisfagan criterios matemáticos y físicos indicados en la sección 3.4 Propagación.

### 3.2. Área de estudio

En el presente trabajo, el área de estudio de la simulación numérica está delimitada por las latitudes:  $-40^\circ$  y  $20^\circ$ , y por las longitudes:  $-130^\circ$  y  $-70^\circ$ , cubriendo



la region del Océano Pacífico cercana a la costa sudamericana (Figuras 3.1 y 3.2). La simulacion numérica se llev a cabo con una resolucion espacial de 1 minuto de arco (1.8 km aprox.) y una resolución temporal  $\Delta t$  de 3 segundos, cumpliéndose así los criterios de estabilidad numérica.

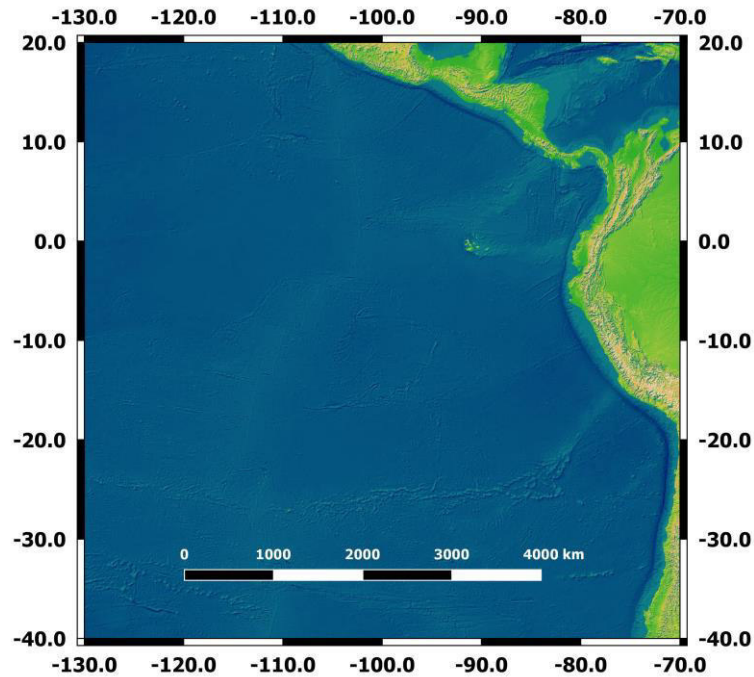
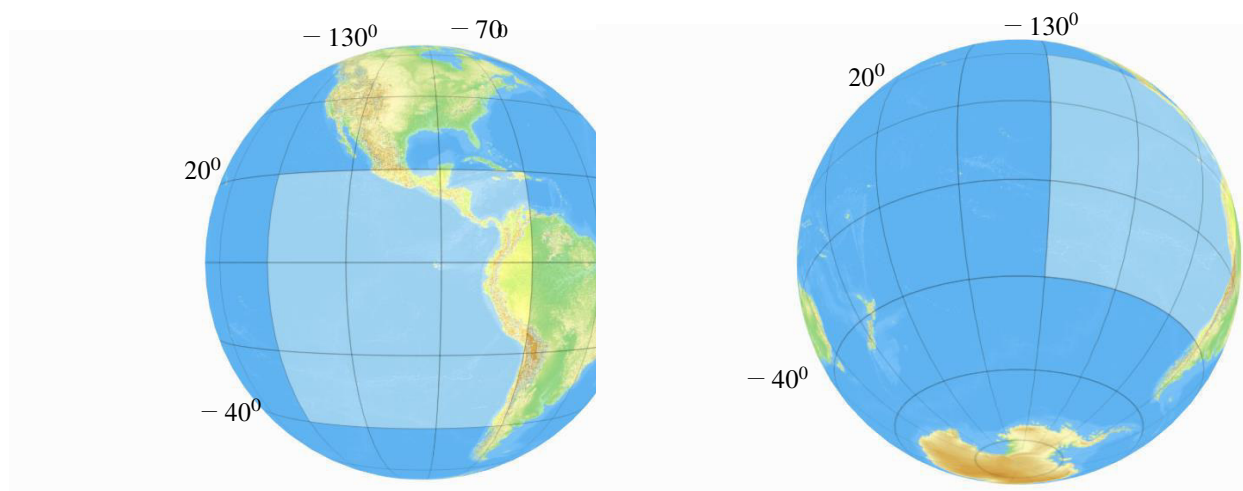


Figura 3.1: Área de estudio en coordenadas geográficas. Aproximadamente cada lado es de unos 6 mil km (elaboracion propia).



(a) Vista central.

(b) En proporción con el Océano Pacífico.

Figura 3.2: Área de estudio en proyección Azimutal Ortográfica (elaboración propia).



### 3.3. Deformacion del suelo oceánico

El campo de deformación cosísmico es simulado numéricamente con la formulacion de Okada (Okada, 1992). Para la fuente sísmica del maremoto de Chile del 2010, cuya localizacion se muestra en las Figuras 3.3 y 3.4, se consideran múltiples subfuentes de  $50 \text{ km} \times 50 \text{ km}$ , con los parametros del mecanismo focal dados por: (strike)  $\phi = 16^\circ$ , (dip)  $\delta = 14^\circ$  y (rake)  $\lambda = 104^\circ$  tomando los parametros citados por (Fujii y Satake, 2012). En la Tabla 3.1 se muestran estos valores.

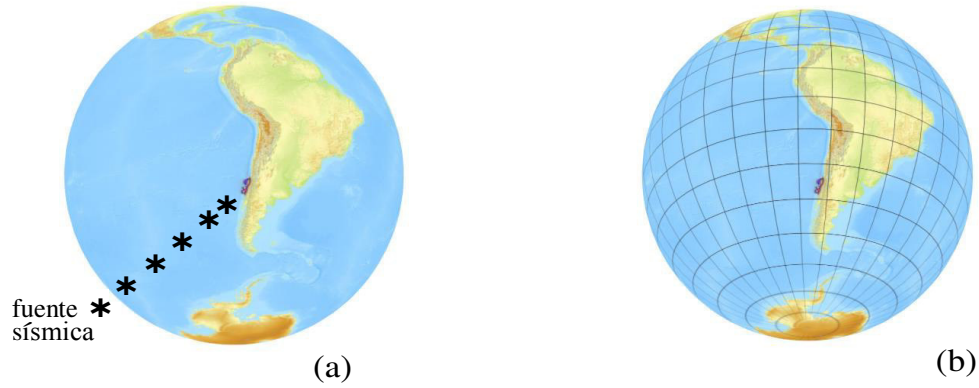


Figura 3.3: Localizacion de las subfuentes en proyección Azimutal Ortográfica (elaboración propia).

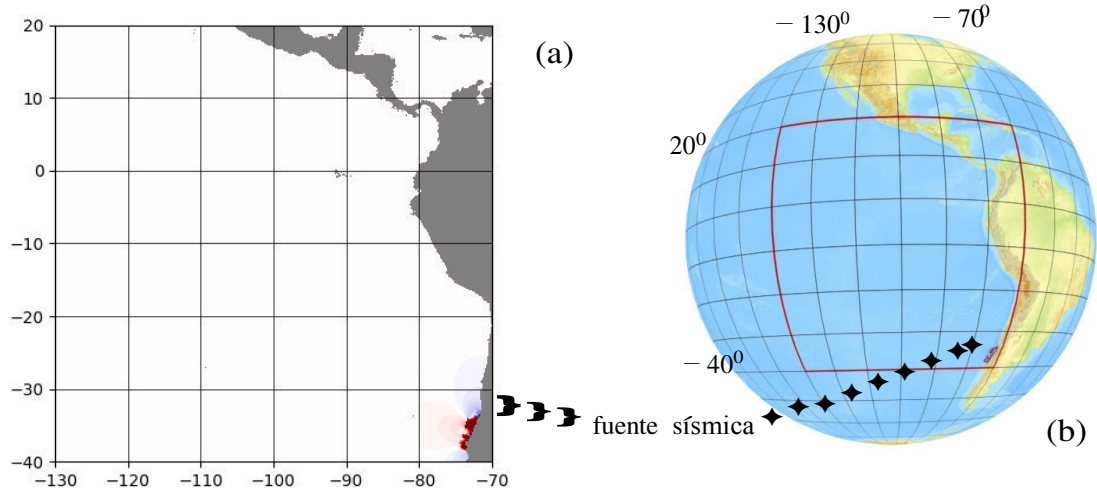


Figura 3.4: Localizacion de las subfuentes dentro del dominio de simulación. Se observa la necesidad de las coordenadas esféricas (elaboración propia).

Tabla 3.1: Localizacion (esquina sur oeste), D (slip) y H (profundidad) de las subfuentes que simulan la fuente sísmica del maremoto de Chile del 2010 (Fujii y Satake, 2012).

Número de subfuente	Lat (°Sur)	Lon (°Oeste)	D (slip) (metros)	H (profundidad) (metros)
1	38.00	74.70	0	0
2	37.56	74.54	0.5	0
3	37.13	74.39	0	0
4	36.70	74.24	2.8	0
5	36.26	74.09	0	0
6	35.83	73.94	0.4	0
7	35.40	73.78	2.5	0
8	34.96	73.63	4.3	0
9	34.53	73.48	1.6	0
10	34.10	73.33	0	0
11	33.66	73.18	0	0
12	33.23	73.02	0	0
13	38.12	74.17	3.5	12 100
14	37.69	74.01	6.9	12 100
15	37.25	73.86	0	12 100
16	36.82	73.71	7.7	12 100
17	36.39	73.56	0.3	12 100
18	35.95	73.41	0.4	12 100
19	35.52	73.25	6.8	12 100
20	35.09	73.10	10.6	12 100
21	34.65	72.95	4.3	12 100
22	34.22	72.80	0	12 100
23	33.79	72.65	0.3	12 100
24	33.35	72.49	0.1	12 100
25	38.24	73.64	8.5	24 200
26	37.81	73.48	1.4	24 200
27	37.38	73.33	14.3	24 200
28	36.94	73.18	1.3	24 200
29	36.51	73.03	5.6	24 200
30	36.08	72.88	0	24 200
31	35.64	72.72	18.8	24 200
32	35.21	72.57	16.2	24 200
33	34.78	72.42	15.8	24 200
34	34.34	72.27	6.9	24 200
35	33.91	72.12	0	24 200
36	33.48	71.96	0	24 200

En la Figura 3.5 se muestra la distribucion de las distancias de dislocación de las subfuentes y en la Figura 3.6 los colores desvanecidos muestran las subfuentes en tierra.

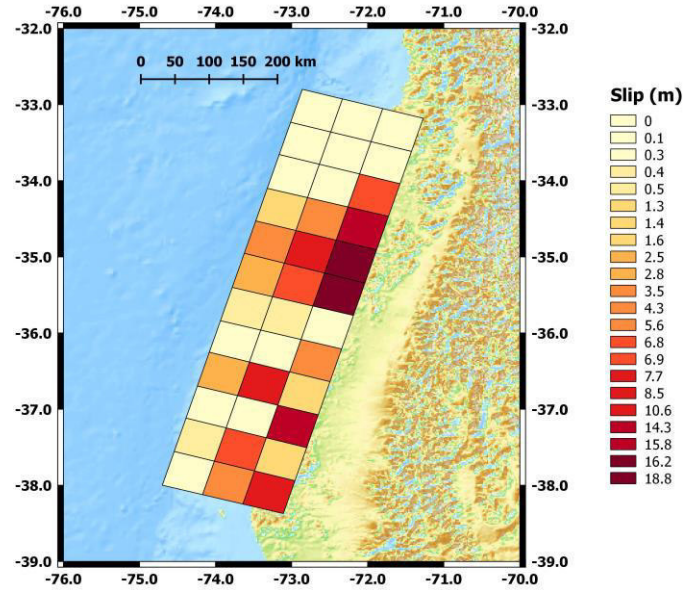


Figura 3.5: Distribucion de las distancias de dislocación calculadas por [Fujii y Satake, 2012](#).

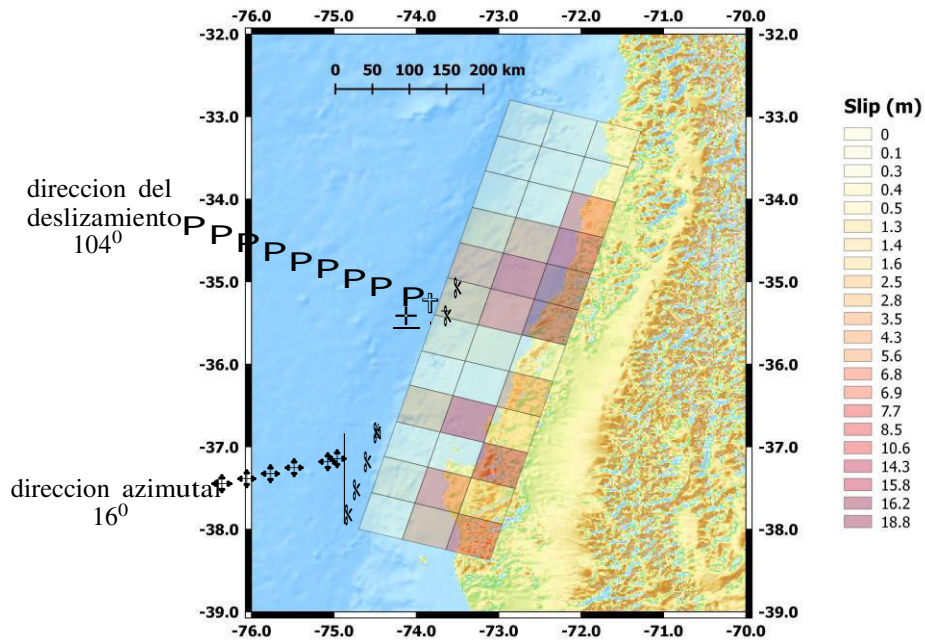


Figura 3.6: Subfuentes: Direccion azimutal  $16^{\circ}$ , distribucion de las distancias de dislocacion, y direccion del deslizamiento  $104^{\circ}$  (el cual tiene lugar sobre el plano de la falla rectangular de buzamiento  $14^{\circ}$ ).

En la Figura 3.7 se muestra la distribución de las distancias de dislocación de las subfuentes en Proyección World Mercator. En la Figura 3.8 se representa la deformación vertical, donde rojo corresponde a la elevación del suelo, notamos que principalmente ocurre en el suelo oceánico, y azul corresponde a la depresión del suelo.

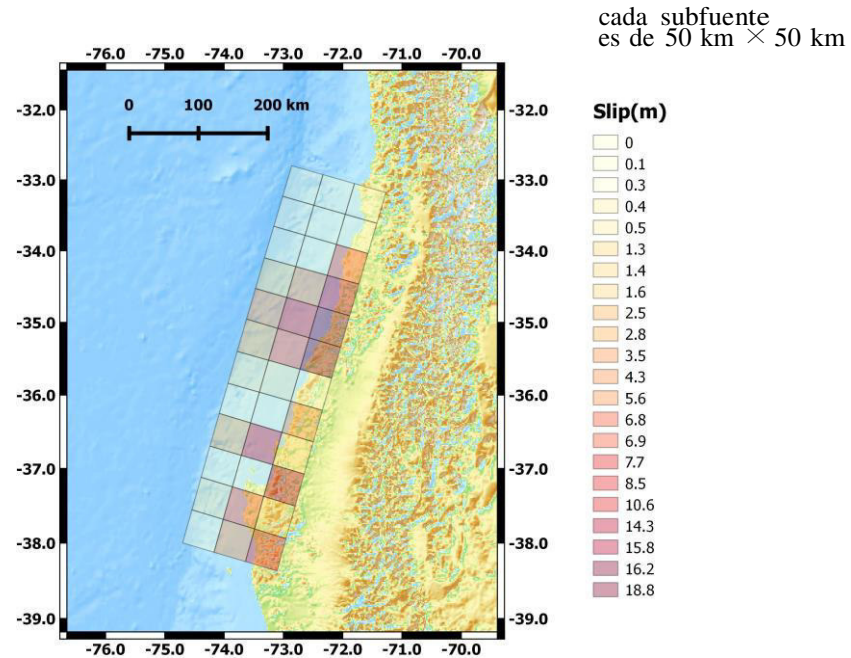


Figura 3.7: Distribución de las distancias de dislocación calculadas por Fujii y Satake, 2012 en Proyección World Mercator.

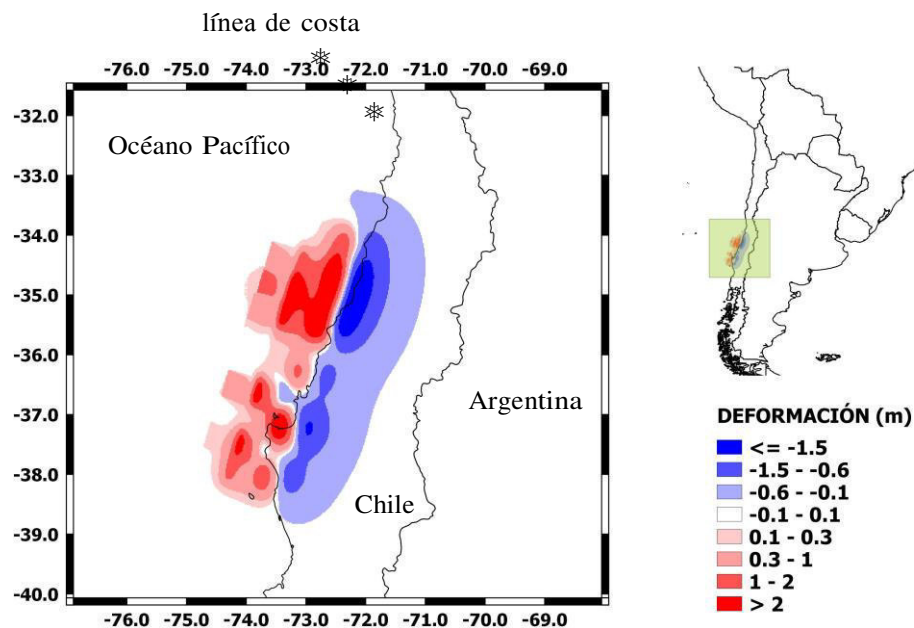


Figura 3.8: Regiones de elevación vertical del campo de deformación de múltiples subfuentes (Fujii y Satake, 2012), calculado con la fórmula de Okada, para el maremoto de Chile del 2010.

En la Figura 3.9 se muestran en colores las curvas de nivel cada 0.5 m del campo de deformación. En la Figura 3.10 se representa su localización en una vista 3D de la Tierra.

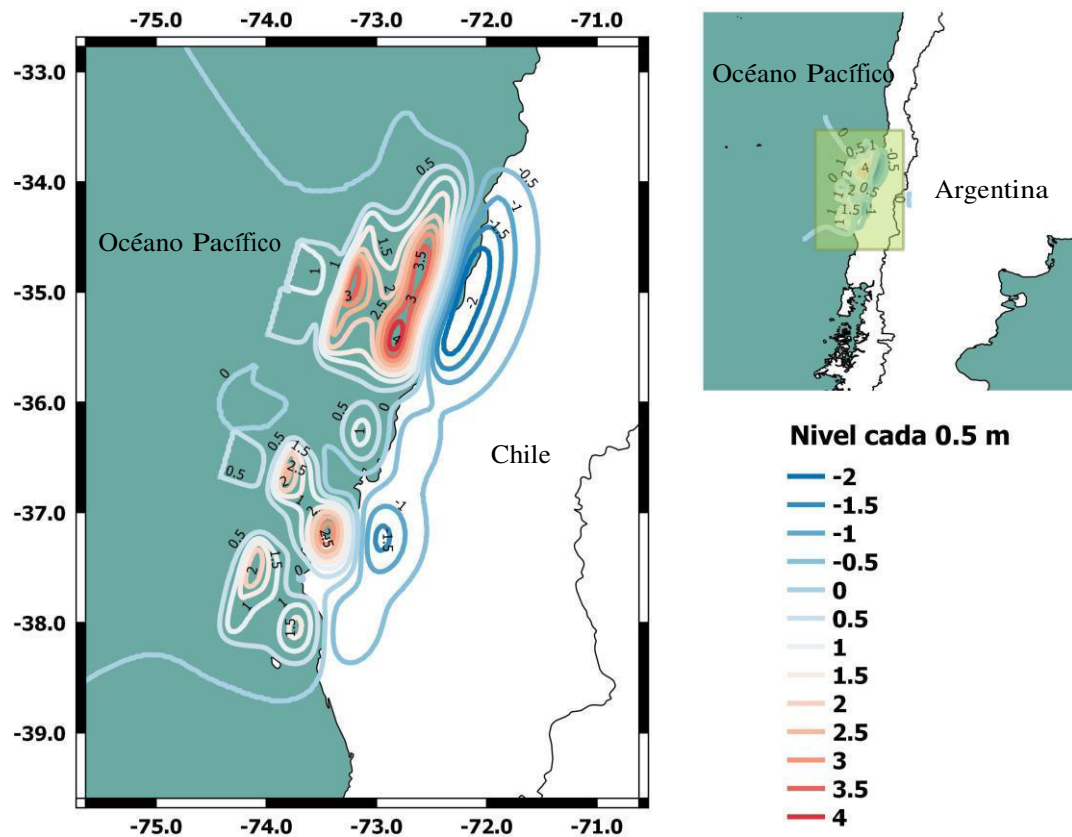


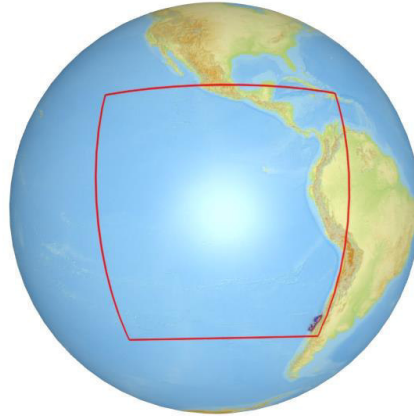
Figura 3.9: Curvas de nivel cada 0.5 metros del campo de deformación de múltiples subfuentes (Fujii y Satake, 2012), calculado con la formula de Okada, para el maremoto de Chile del 2010 (elaboracion propia).



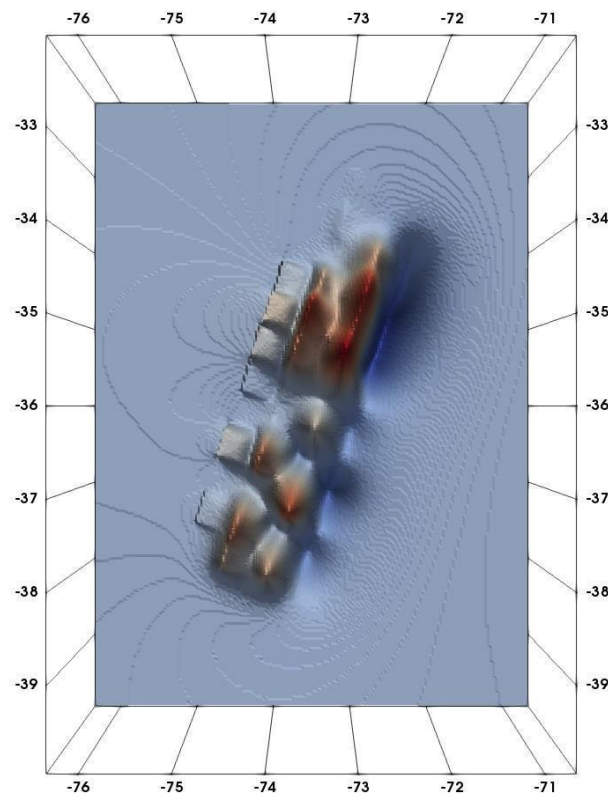
Figura 3.10: Subfuentes dentro del dominio de simulación (elaboración propia).



La Figura 3.11a es una representación 3D donde se observa el dominio de simulación y el campo de deformación. La Figura 3.11b muestra una vista superior de la representación 3D del campo de deformación.



(a)



(b)

Figura 3.11: Vista superior del campo de deformación de múltiples subfuentes ([Fujii y Satake, 2012](#)), calculado con la fórmula de Okada, para el maremoto de Chile del 2010 (elaboración propia).

En la Figura 3.12 se muestran diferentes vistas de la representación 3D del campo de deformación. En la Figura 3.12a se indican los puntos extremos.

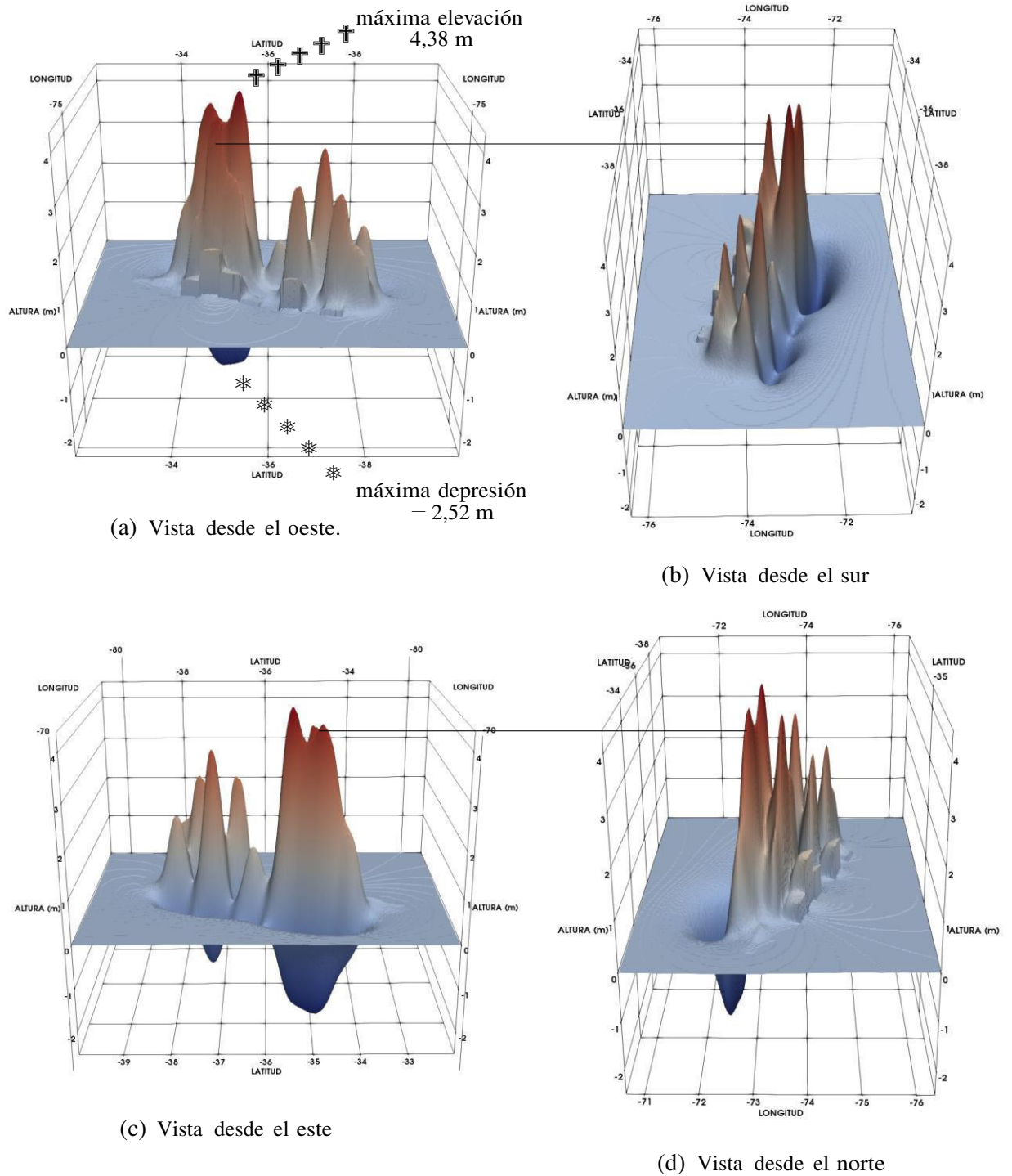


Figura 3.12: Vistas del campo de deformación (elaboración propia).

### 3.4. Propagacion

Se realizaron dos simulaciones numéricas de la propagación del maremoto con el modelo TUNAMI: el escenario sin la aceleración de Coriolis, y con la version que implementa la aceleración de Coriolis.

Los datos de batimetría se obtuvieron de la base de datos de batimetría GEBCO 30, los cuales tienen una resolución de 0.5 minutos. Con el fin de obtener una resolución de 1 minuto, se tomaron solamente los valores que distan directamente 1 minutos, en latitud y longitud, obteniéndose así la batimetría con la resolucion requerida.

**Teorema de Muestreo** (Diniz et al, 2010) Para una adecuada representación de una señal  $X(t)$  por sus muestras temporales  $X(nT)$

- La señal debe tener banda limitada, esto es, el espectro de frecuencias debe estar limitado en un rango por una frecuencia maxima  $f_{\max}$
- La razón de muestreo  $f_s$  debe elegirse de almenos el doble de  $f_{\max}$ :

$$f_s \geq 2f_{\max} \quad \text{en términos del periodo} \quad T_s \leq T_{\max}/2$$

La menor frecuencia permitida , es decir  $f_s = 2f_{\max}$  es llamada muestreo de Nyquist, y  $f_{\max} = f_s/2$  es llamado frecuencia de Nyquist. Para el caso de las ondas, con las relaciones  $v = \lambda f$  y  $v = \lambda_{\min} f_{\max}$ , tenemos en términos de la longitud de onda:  $\lambda_s \leq \lambda_{\min}/2$ . Con lo que la resolución espacial  $\Delta x$  debe cumplir  $\Delta x \leq \lambda_{\min}/2$ .

**Estabilidad** La técnica de discretizacion de Diferencias Finitas requiere cumplir la condicion de estabilidad conocida como CFL, en la cual la velocidad de la propagacion  $v = \sqrt{gh}$  no debe superar a la velocidad numérica  $v_{\text{num}} = \Delta x/\Delta t$ , esto es:  $v \leq v_{\text{num}}$ , o  $v/v_{\text{num}} \leq 1$ . Donde al cociente se le llama CFL, y debe cumplirse por tanto

$$\text{CFL} = v\Delta t/\Delta x \leq 1$$

Para evitar riesgos numéricos se elijen en la practica valores menores o iguales a 0.7 para CFL (Jiménez, 2015).

En el presente trabajo debido a que la Tierra se considera como una esfera:  $\Delta x = (R \cos \phi)\Delta\theta$  donde  $R$  es el radio de la Tierra,  $\phi$  es la latitud en radianes y  $\Delta\theta$  es la resolución espacial (1 minuto) en radianes. Con  $\Delta t = 3.0$  s,  $R = 6\,370\,000$  m,



$\phi = 36^\circ$  y  $\Delta\theta = 0.0166^\circ$ , tenemos  $CFL < 0.7$ .

En la Figura 3.15 se muestra la propagación con la aceleración de Coriolis en proyección Azimutal Ortográfica a las 0:25 horas, 0:50 horas, 1:15 horas, 1:40 horas y 2:05 horas de simulación.

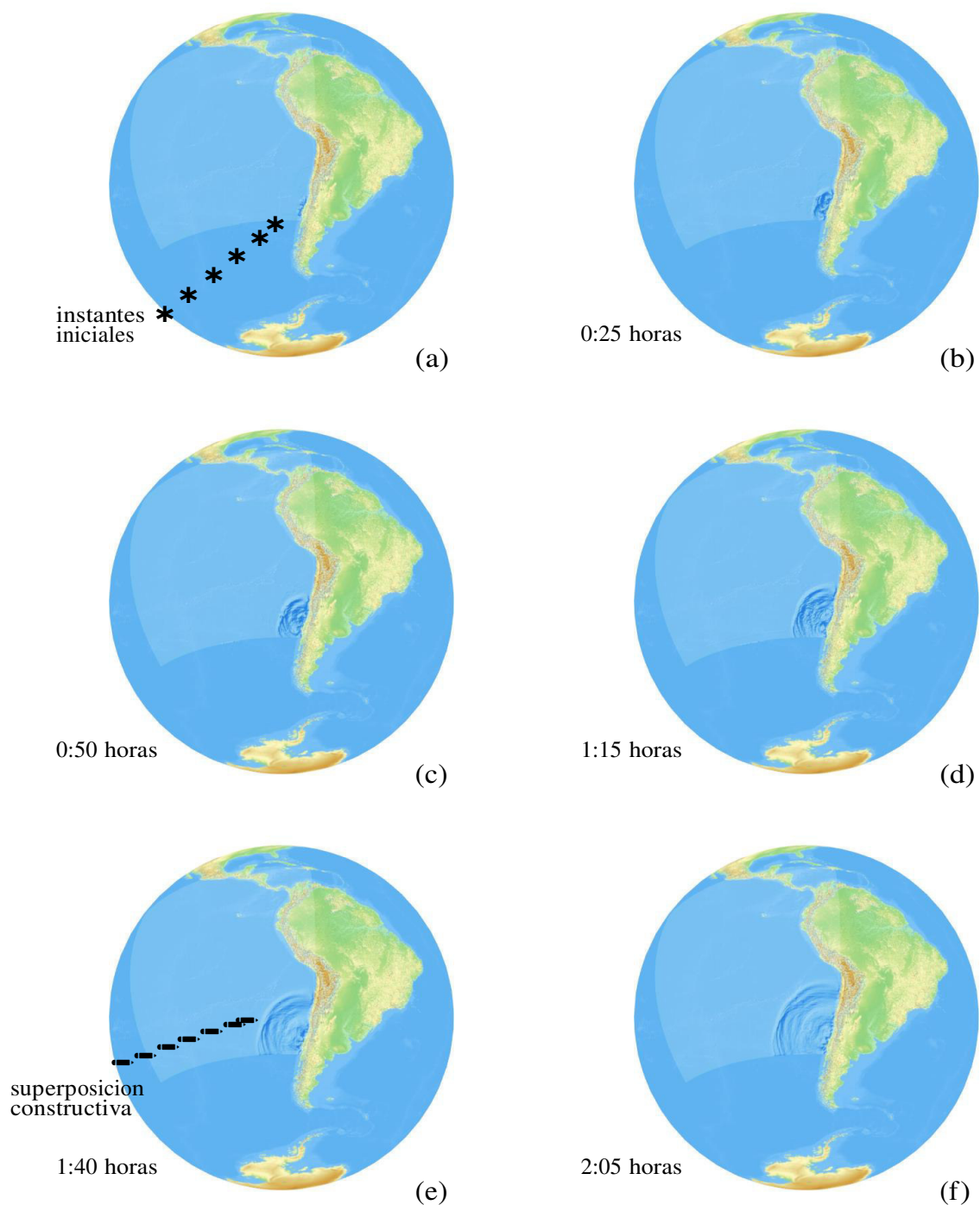


Figura 3.15: Propagación con la aceleración de Coriolis indicando el tiempo en horas transcurridas de simulación. Se resalta la región de superposición constructiva, la cual al propagarse determina la región de mayor energía del maremoto (elaboración propia).

En el desarrollo de la propagación notamos la superposición constructiva de las ondas, lo cual se resalta en las Figuras 3.15e y 3.16. En la Figura 3.17 tenemos las alturas de ola en la propagación en tres pasos de tiempo durante la simulación.

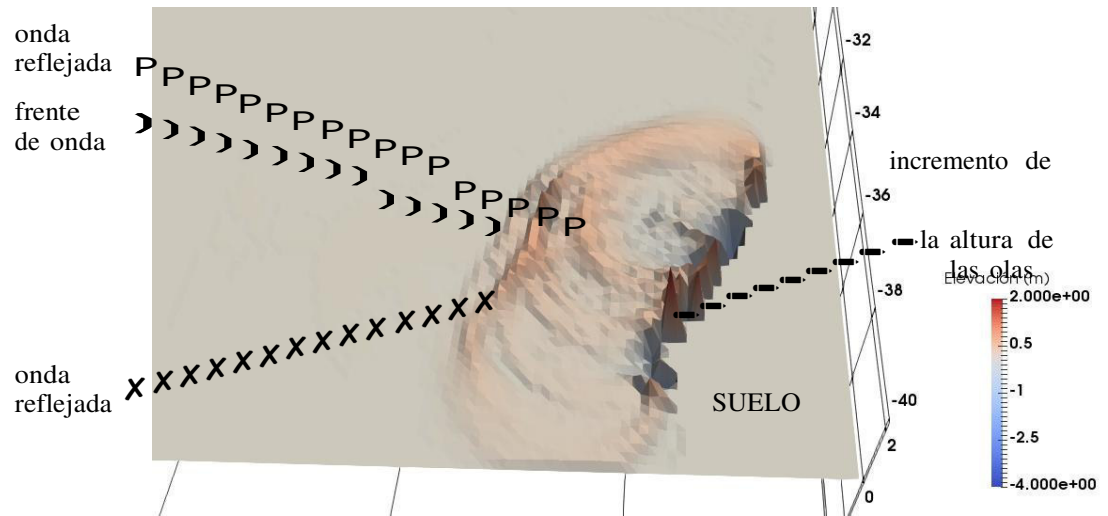


Figura 3.16: Representacion de baja resolución de la propagación a las 0 : 25 horas de simulacion.

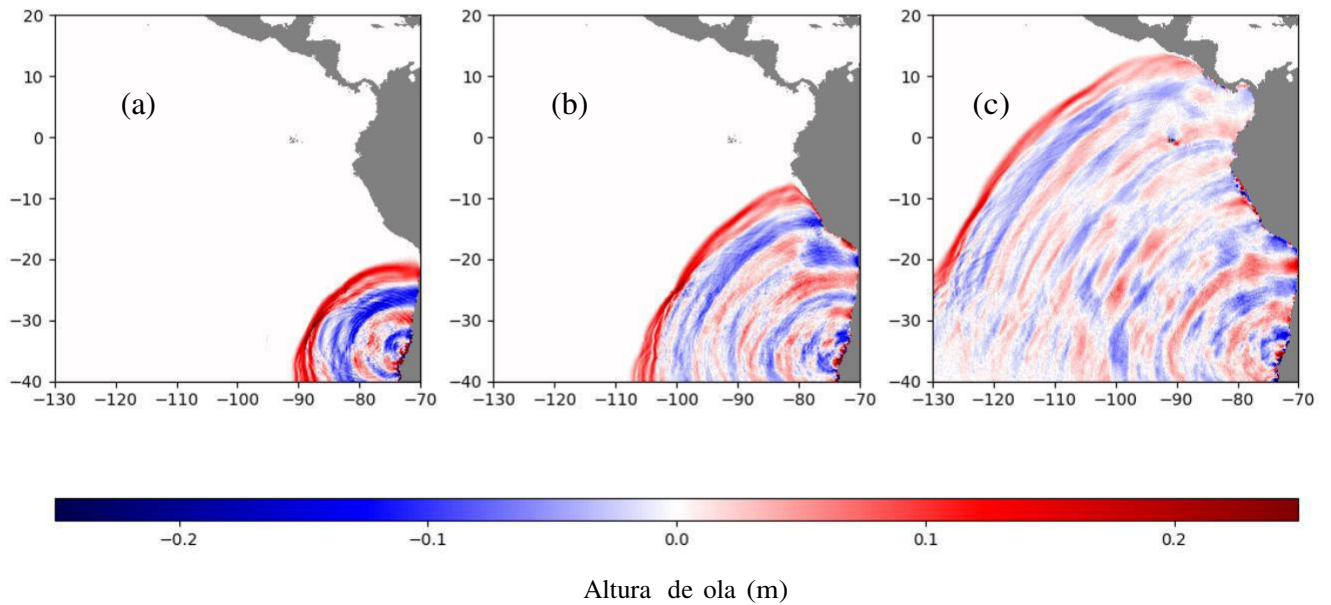


Figura 3.17: Propagacion a las 2:05 horas, 4:10 horas y 8:20 horas en la simulación.

## Capítulo 4

# Adquisición y Procesamiento de Datos

A efectos de la validación se toman los datos observados por las estaciones DART (Deep-ocean Assessment and Reporting of Tsunamis) 32412, 32411, 43412 y 51406 ([www.ndbc.noaa.gov/station\\_page](http://www.ndbc.noaa.gov/station_page)). En la Figura 4.1 se observa su ubicación. Las series de tiempo registradas por las estaciones (Figura 4.2) son resultados de la superposición de distintas ondas, como por ejemplo las ondas de mareas. Ya que el modelo numérico solo simula ondas de maremotos, se deben filtrar los datos observados de manera que pasen solo las ondas que corresponden a los maremotos.

Las series de tiempo registradas son señales. Cuando se trata de señales discretas la manera de filtrar ondas es aplicando la transformada de Fourier discreta (Diniz et al, 2010 y Schoenstadt, 2005). Para la aplicación de este método, con la frecuencia de muestreo se debe poder reconstruir la señal continua, con esto se puede calcular el espectro de frecuencias. Aquí se dejan pasar solo las frecuencias que corresponden a las ondas de maremotos (Arnott, 2010), sabiendo que los maremotos tienen periodos entre 5 y 30 minutos (Abraimi, 2014). Luego se aplica la transformada de Fourier discreta inversa y se tienen las series de tiempo solo con las ondas de maremoto.

Las longitudes de onda en la estación DART 32412 están determinadas por la deformación del suelo oceánico así como por la batimetría. En la estación DART 51406 y 43412 se esperan longitudes de onda mayores que en las otras dos estaciones debido a la profundidad del océano en la que se encuentran. Es por esto que en estas estaciones al momento de filtrar frecuencias se permiten frecuencias menores que en el caso de las estaciones DART 32412 y 32411. Esto se observa en la Figura 4.3.

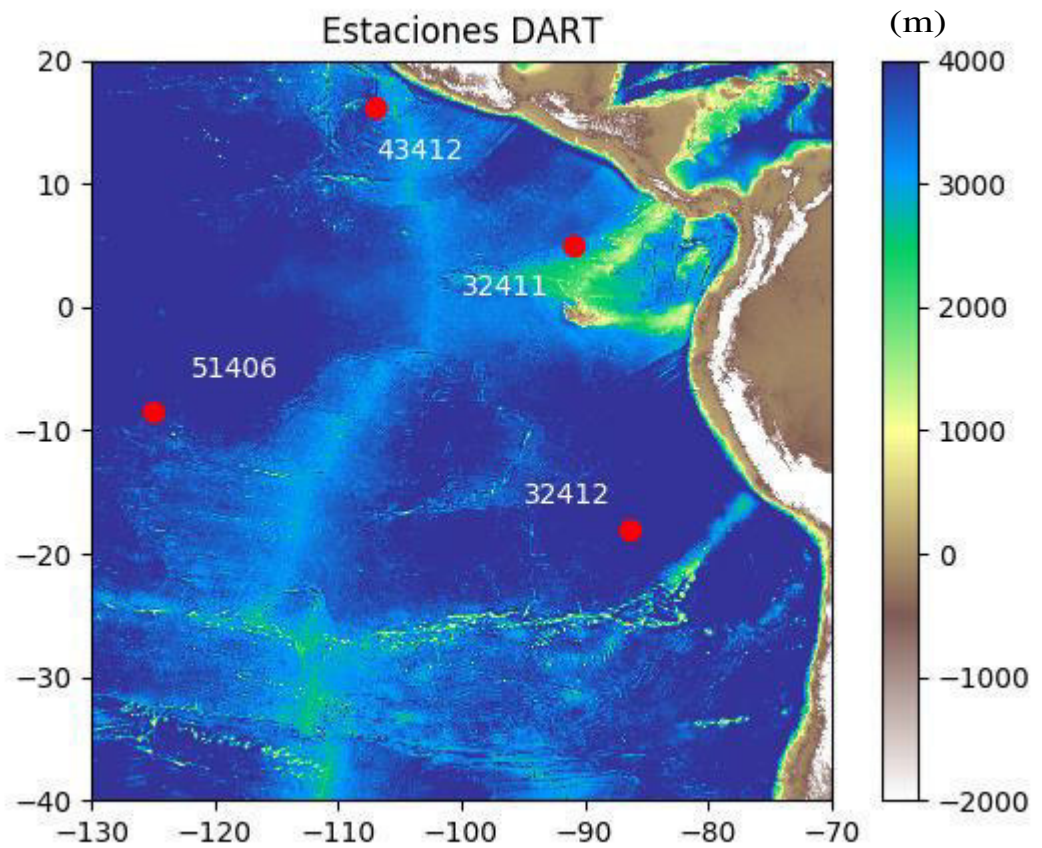


Figura 4.1: Ubicacion de las estaciones DART en coordenadas geográficas. Resaltando la batimetría observamos que las estaciones 32411 y 43412 se encuentran en regiones menos profundas que 32412 y 51406.

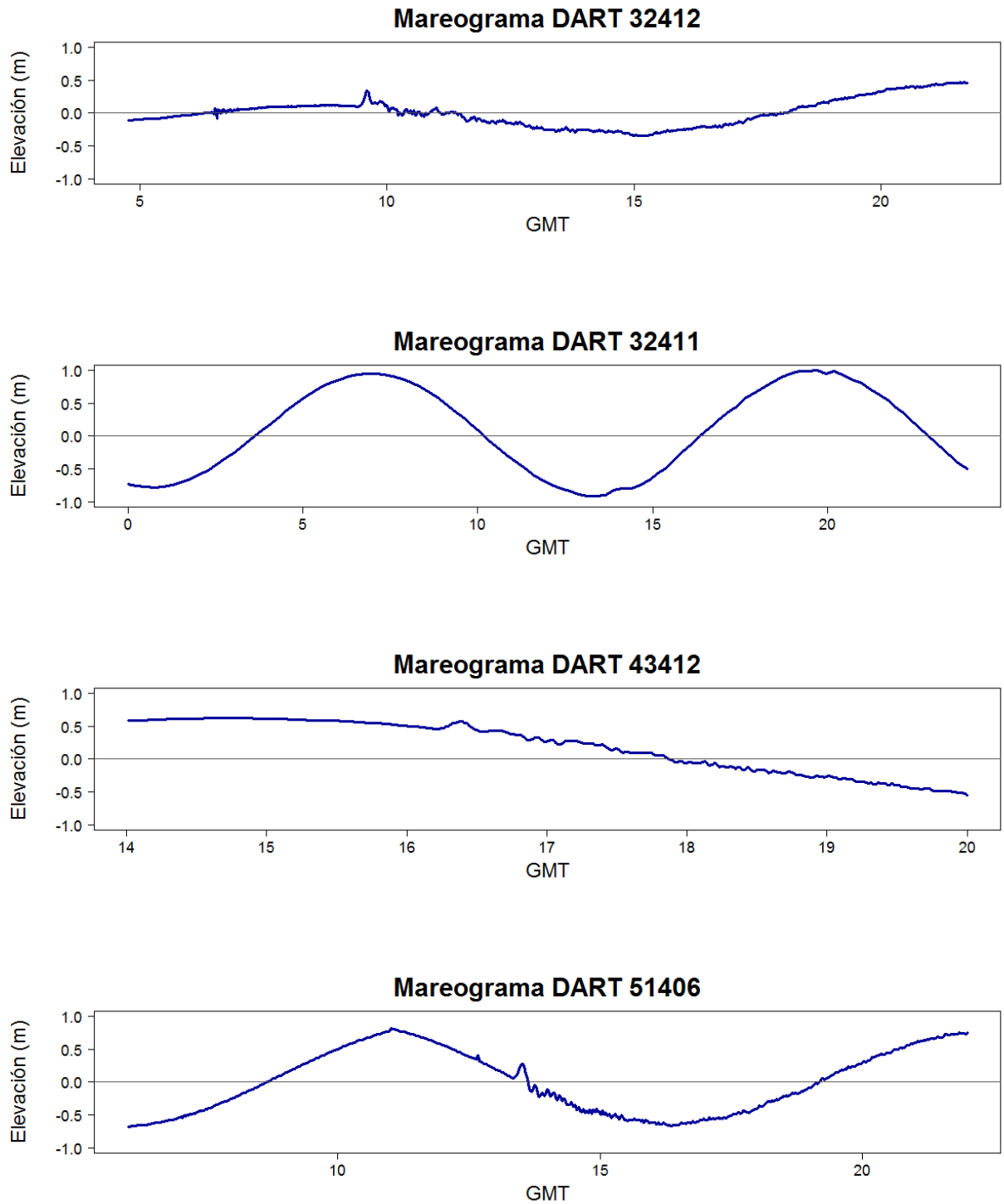


Figura 4.2: Series de tiempo DART las cuales contienen ondas de diversas frecuencias incluyendo las de maremoto. La elevacion registrada se muestra en funcion de la hora GMT del 27 de febrero del 2010. La coordenada vertical está en la misma escala en todas las gráficas.

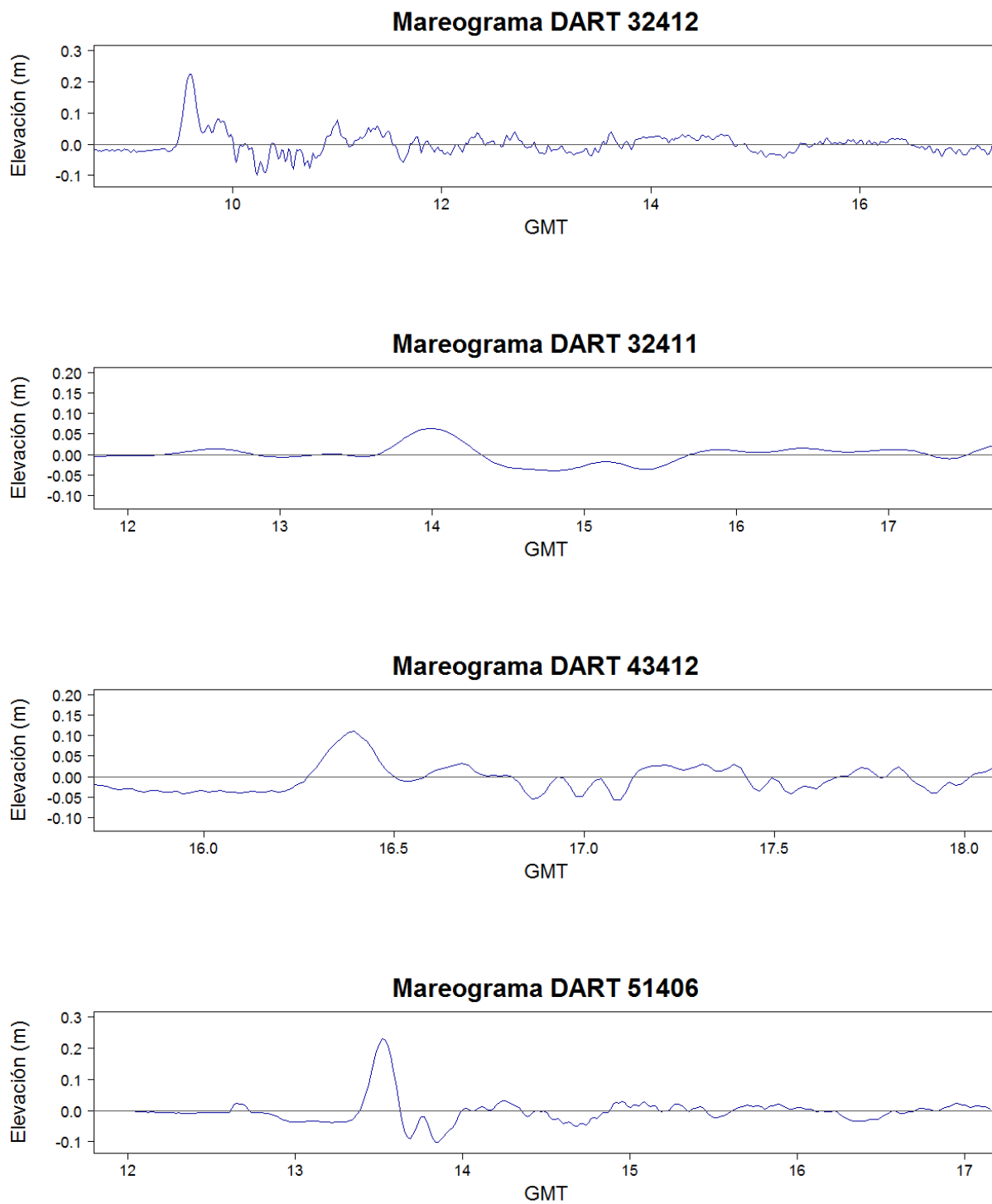


Figura 4.3: Series de tiempo DART donde se han filtrado frecuencias que no corresponden a maremotos.

# Capítulo 5

## Validación y Resultados

### 5.1. Validación

Con las observaciones de las estaciones DART 32412, 32411 43412 y 51406, donde los registros de elevación de la superficie del océano han sido filtrados retirando las frecuencias bajas que no corresponden a las de los maremotos, se realiza la validacion. Las series de tiempo se observan en la Figura 5.1.

Con la estacion DART 32412 podemos ver que la simulación se corresponde con las observaciones. Se aprecia el frente de onda de mayor altura que el tren de ondas. El frente de onda llega directamente a diferencia del tren de ondas donde contribuyen componentes resultado de la reflexión en las islas y en la costa. Es por esto que la correspondencia disminuye conforme aumenta el tren de ondas.

Para el caso de la estacion DART 32411, se observa una correspondencia con los datos simulados. Las diferencias en el frente de onda son debido a las reflexiones y difracciones en las costas de las islas Galapagos, donde la resolucion no representa a detalle la batimetría real.

En la estacion DART 43412 notamos que la correspondencia con las observaciones es menor, esto es debido a que a esa distancia de la fuente del maremoto el frente de onda tiene componentes resultado de la reflexión en las costas y en las islas, y se requiere de una batimetría de mayor resolucion para que sean representadas estas componentes con más detalle en los cálculos numéricos.

Se observa un frente de onda en DART 51406 con altura similar al de DART 32412 que es el mas cercano a la fuente del maremoto. Esto debido a que DART 51406 se encuentra en la zona de mayores amplitudes según la distribucion de amplitudes ([Fujii y Satake, 2012](#)) pues esta es la region de mayor energía del maremoto ([Abraimi,](#)



2014). En la propagación mostrada en la Figura 3.16 vemos como se va formando una región de superposición constructiva, la cual se mantiene, como puede apreciarse en las Figuras 3.15 y 3.17.

En general se observa una subestimación de los datos simulados respecto de las observaciones en las estaciones DART.

En la Tabla 5.1 podemos observar los valores de correlación. Los valores más altos corresponden a la estación de menor profundidad DART 32411, con 0.946 para la simulación que implementa el término de Coriolis y 0.915 sin el término de Coriolis, lo cual indica una mayor correspondencia con los valores medidos por las estaciones DART al considerar la aceleración de Coriolis. Los menores valores corresponden a la estación más distante DART 51406, con 0.687 para la simulación que implementa el término de Coriolis y 0.674 sin el término de Coriolis, lo cual indica también una mayor correspondencia con los valores medidos por las estaciones DART al considerar la aceleración de Coriolis.

Tabla 5.1: Validación de las series de tiempo simuladas y las observadas por las estaciones DART. Se indican los valores de correlación de Pearson.

Estacion DART	Correlacion Con Coriolis	Correlacion Sin Coriolis
32412	0.793	0.790
32411	0.946	0.915
43412	0.883	0.881
51406	0.687	0.674

## 5.2. Resultados

Influencia de la aceleración de Coriolis. Las diferencias con la inclusión del término de Coriolis en la simulación numérica de la propagación se visualizan comparando los dos escenarios, el modelo numérico sin considerar el efecto Coriolis y el modelo numérico que implementa Coriolis. Se comparan las series de tiempo de los mareógrafos virtuales (Figura 5.2) y se restan los resultados de ambos escenarios en todo el dominio de simulación (Figura 5.3).

Las series de tiempo de los mareógrafos virtuales ubicados en los puntos de las

estaciones DART, Figura 5.2, muestran resultados de la perturbacion del nivel medio de la superficie  $\eta$  muy similares. Podemos dar la siguiente observacion:

- La region descendente del frente de onda es la que presenta mayores diferencias en cada caso, excepto en DART 51406.

Se debe a que en el frente de onda observamos una mayor altura de la masa de agua, por lo que la rapidez de las partículas de agua es mayor, ver subsección 2.1.2, aumentando de esta manera  $\eta$ , ver 2.1.3.

La excepcion en la observación es debido a dos factores. Primero, si bien el frente de onda en DART 51406 es de mayor altura, la region descendente tiene mayor pendiente que en las otras estaciones DART, por lo cual la componentes verticales de la velocidad de las partículas de agua predominan. En el fundamento teórico vemos que la fuerza de Coriolis es proporcional a las componentes horizontales  $u$  y  $v$ . Por lo que, en la región descendente del frente de onda en la estacion DART 51406 es menor la influencia de Coriolis.

Segundo, el recorrido del frente de onda registrado por DART 51406, es el que cruza menos latitudes en comparacion con las demás estaciones DART, por lo cual es menor la influencia del efecto Coriolis que depende del Seno de la latitud local. Adicionalmente este recorrido se encuentra en las latitudes donde  $f \equiv 2\Omega \sin \phi$  comienza a desvanecerse (Figura 2.8).

En las Figuras 5.3 y 5.4 vemos la diferencia  $\eta_c - \eta_o$  de alturas de propagacion de la simulacion con Coriolis  $\eta_c$  y sin Coriolis  $\eta_o$ . La escala de colores es la misma que en el grafico de la propagacion con Coriolis en la Figura 3.17. Notamos lo siguiente:

1. La diferencia  $\eta_c - \eta_o$  es casi nula excepto cerca a las costas donde  $\eta$  se incrementa, ver subseccion 2.1.1. Esto es debido:
  - Al incremento de la rapidez de las partículas de agua  $u$  y  $v$ , ver subsección 2.1.2.
  - Y a la influencia solamente sobre  $\eta_c$  de la multiplicación de esta rapidez con el parametro de Coriolis:  $f u$ , ver subsección 2.1.3.
2. Cerca a las costas de la zona ecuatorial las diferencias no estan incrementadas. Esto es debido a que  $\eta$  es de menor altura en esta region (Figura 3.17).

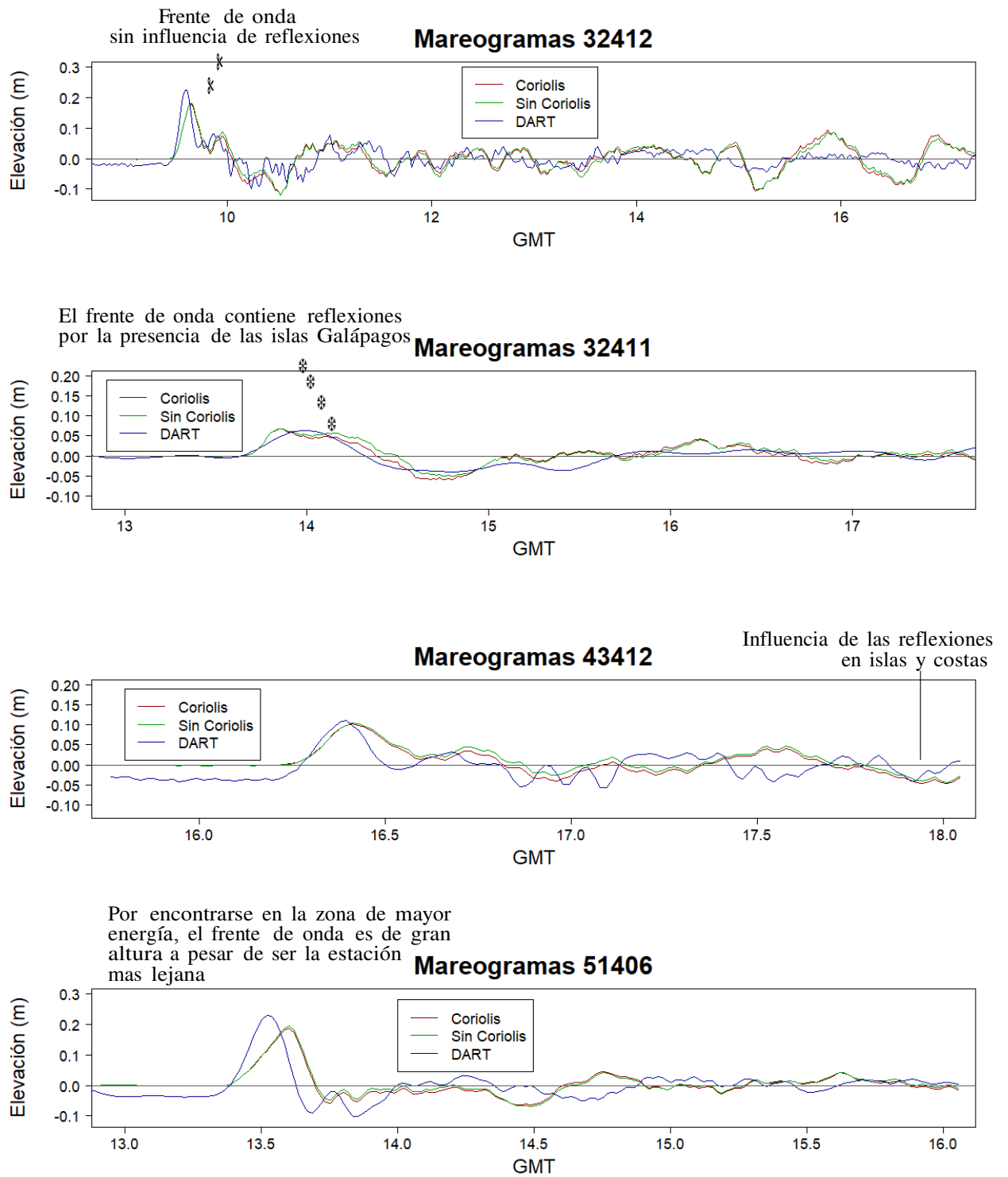


Figura 5.1: Validación de las series de tiempo simuladas y las observadas por las estaciones DART. Se tiene una descripción de las series de tiempo.

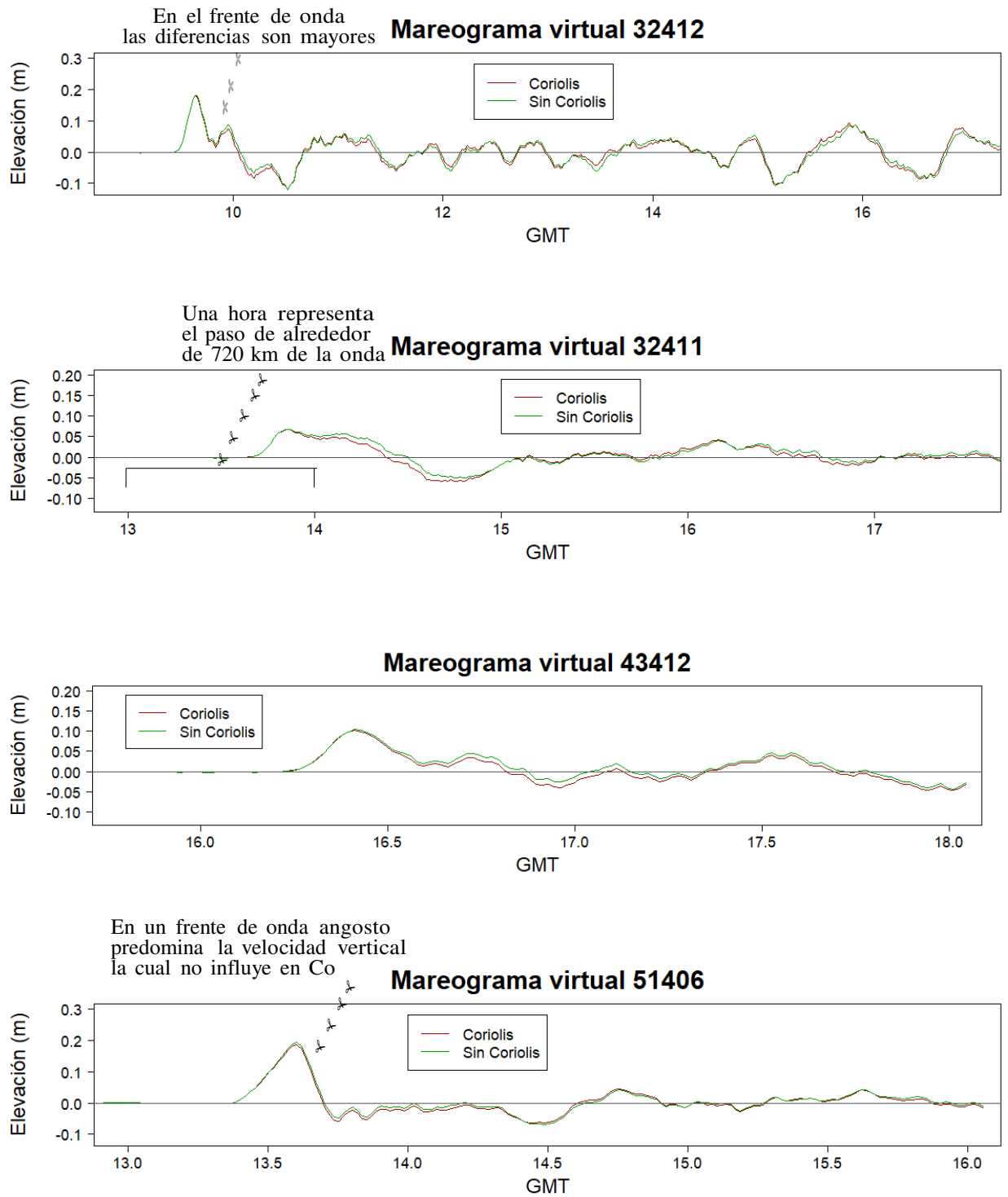


Figura 5.2: Mareogramas virtuales. Las alturas de olas son del orden de centímetros debido a la batimetría que es del orden de 4000 m. Las influencia del término de Coriolis depende de la velocidad de las masas de agua, las cuales son mayores en batimetrías poco profundas.

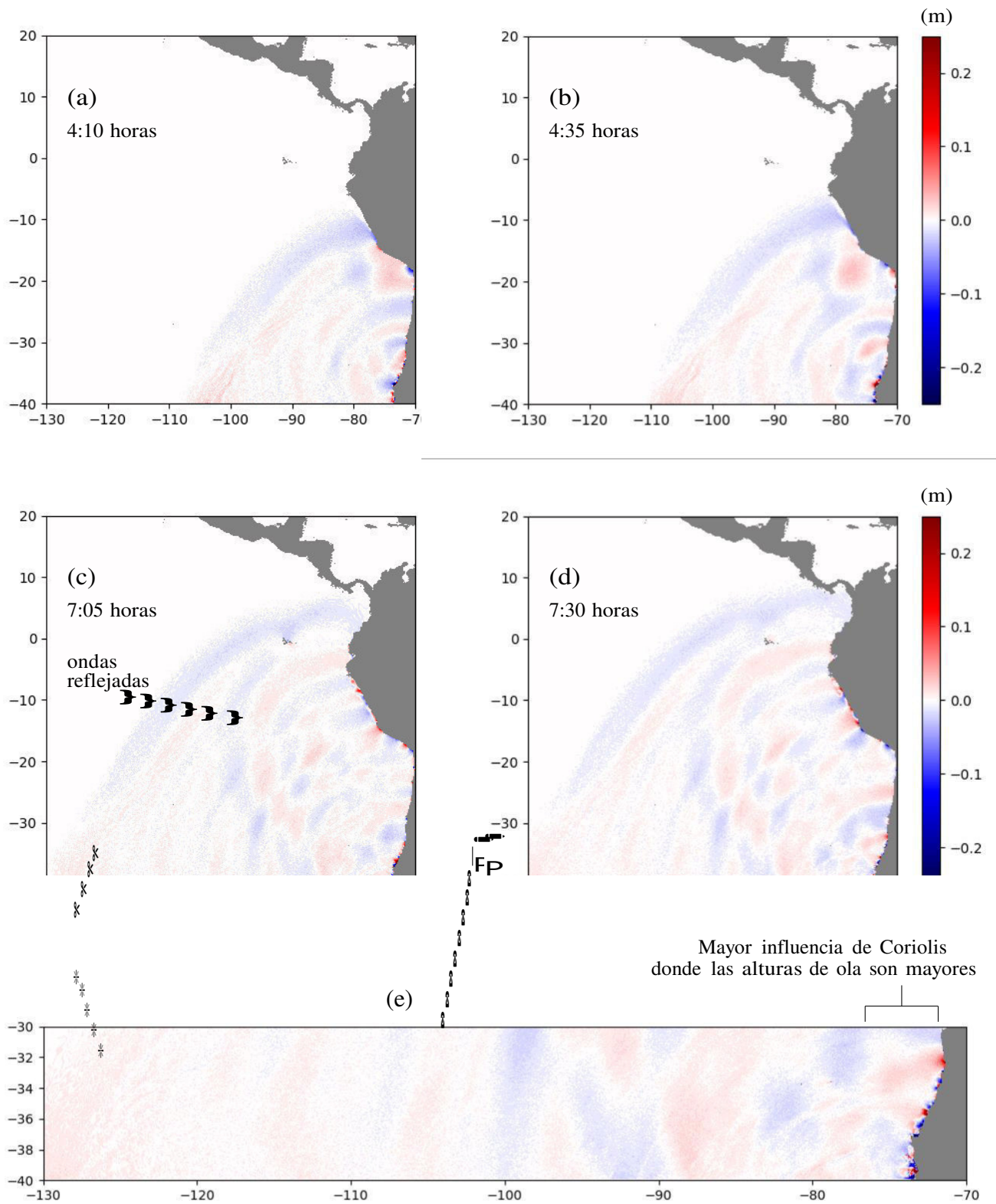


Figura 5.3: Influencia del término de Coriolis en la propagación. Hemisferio Sur. Se ha restado a la elevacion con Coriolis la elevación sin Coriolis. Cerca a las costas es mayor la influencia de la aceleracion de Coriolis.

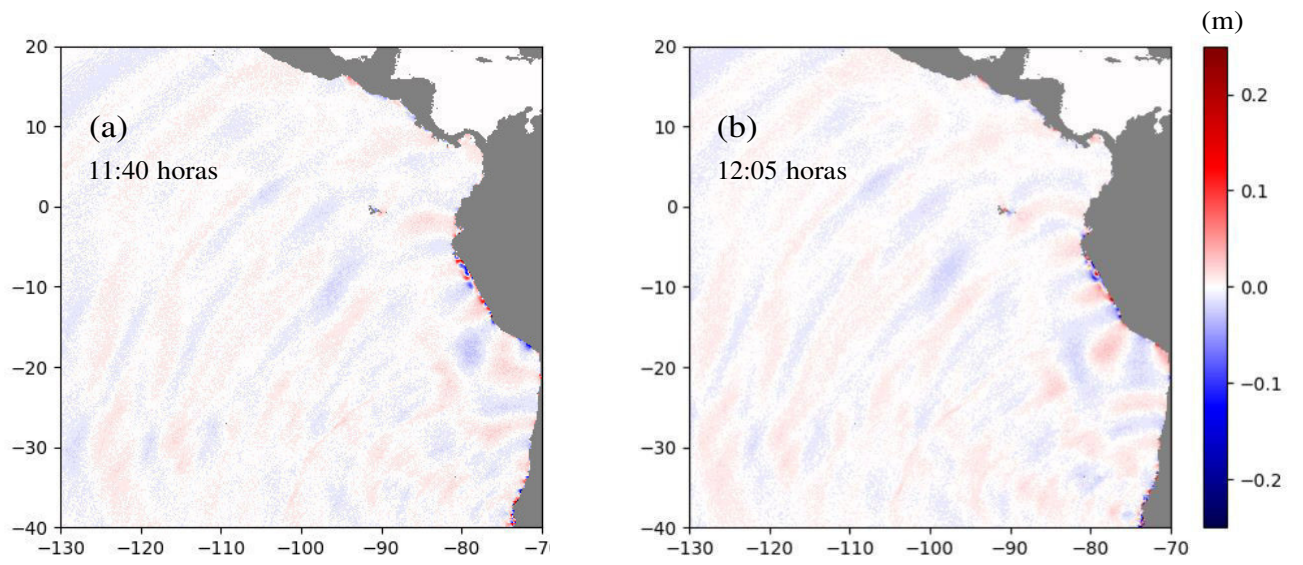


Figura 5.4: Influencia del término de Coriolis en la propagación del maremoto. Se ha restado a la elevación con Coriolis la elevación sin Coriolis a 11:40 horas y 12:05 horas en la simulación.

# Capítulo 6

## Conclusiones

### 6.1. Conclusiones

Se determinó la influencia de la aceleración de Coriolis en la propagación de un maremoto al implementar la subrutina respectiva en el modelo numérico TUNAMI para el caso del maremoto de Chile del 2010. En áreas donde las amplitudes de las ondas son pequeñas (en grandes profundidades) la aceleración de Coriolis causa ligeros incrementos y decrementos de la altura de las ondas. La influencia de la aceleración de Coriolis es mayor donde la altura de las olas del maremoto es mayor (cerca a las costas), como se muestra en la sección 5.2 Resultados.

Con los cálculos de correlación se evidencia una mayor correspondencia con los datos de elevación de las estaciones DART al considerar la aceleración de Coriolis en la simulación numérica del maremoto, como se muestra en la sección 5.1 Validación. Estas estaciones se encuentran en zonas de batimetrías profundas.

De esta manera se puede concluir que:

- La batimetría determina cuán grande es la perturbación del nivel medio de la superficie  $\eta$ . Donde  $\eta$  es mayor se incrementa la rapidez horizontal  $u$  de las partículas de agua. De esta manera es mayor la influencia de la aceleración de Coriolis sobre  $\eta$  por medio del término  $f u$ , como se muestra en las subsecciones 2.1.1, 2.1.2 y 2.1.3.
- En las zonas de las estaciones DART se aprecia un aumento de la correspondencia de la elevación de la superficie del océano al considerar la aceleración de Coriolis. Los datos de correlación con las estaciones DART indican una cercanía al valor 1 al considerar el término de Coriolis.

## 6.2. Trabajo futuro

- Estudiar la influencia de la aceleración de Coriolis aumentando la resolución de la batimetría a 0.5 minutos. De esta manera se determinará si se tiene una mayor correspondencia en la simulación de la propagación de las ondas de maremoto con los datos de las estaciones DART.
- Se ha estudiado la influencia de la aceleración de Coriolis en el proceso de propagación de un maremoto en escala sinóptica <sup>1</sup>. En cuanto al proceso de inundación en un futuro se espera estudiar la influencia de la aceleración de Coriolis en la inundación de zonas costeras causada por maremotos de origen lejano.
- Estudiar a escala sinóptica la interacción de las corrientes oceánicas con las ondas de la propagación de un maremoto mediante la conservación de masa y momentum.

---

<sup>1</sup>La escala de movimiento se caracteriza por las escalas de longitud en la horizontal  $L$  del fenómeno a ser investigado. La escala sinóptica se refiere a un sistema de ondas largas tales que  $L \geq 10^6 \text{m}$



# Apéndice A

## Campo de deformación cosísmico

### A.1. Esfuerzo

En la descripción de fuerzas internas y deformaciones en los materiales solidos usamos los conceptos de esfuerzo y deformacion unitaria. (Shearer, 2009). Tenemos un plano infinitesimal dentro de un medio elastico homogéneo en equilibrio estático. La orientacion est determinada por  $\hat{n}$ . La fuerza por unidad de área en la cara donde se orienta  $\hat{n}$  es llamada vector traccion y se representa <sup>1</sup> con  $\mathbf{t}(\hat{n}) = (t_x, t_y, t_z) = t_x\hat{x} + t_y\hat{y} + t_z\hat{z}$ , en la base cartesiana. Las fuerzas que extienden se consideran positivas y las que comprimen, negativas. En la cara opuesta al plano, hay una fuerza igual y opuesta,  $\mathbf{t}(-\hat{n}) = -\mathbf{t}(\hat{n})$ . La componente normal de  $\mathbf{t}$  es llamada esfuerzo normal y la paralela, esfuerzo tangencial. En los fluidos no hay esfuerzo tangencial.

Con las definiciones anteriores, consideremos ahora un diferencial de volumen cúbico dentro del medio, orientado segun los ejes xyz. Representaremos los valores de  $(t_x, t_y, t_z)$  dentro del medio. Siendo  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$  los vectores unitarios que determinan los planos yz, xz y xy respectivamente, ahora  $t_x(\hat{n})$  dependerá de los vectores traccion en cada plano, es decir de  $t_x(\hat{x})$ ,  $t_x(\hat{y})$  y  $t_x(\hat{z})$

La dependencia de  $(t_x, t_y, t_z)$  con  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  se expresa con el tensor esfuerzo <sup>2</sup>,  $\tau$ :

---

<sup>1</sup>La notacion  $T(\hat{n})$  también es usada para el vector traccion

<sup>2</sup>El tensor esfuerzo también se representa con  $\sigma_{ij}$

**Tensor esfuerzo**

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc} \square & & \square \end{array} \\
 \tau = \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} t_x(\hat{x}) & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} t_x(\hat{y}) & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} t_x(\hat{z}) \\
 \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} t_y(\hat{x}) & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} t_y(\hat{y}) & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} t_y(\hat{z}) \\
 \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} t_z(\hat{x}) & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} t_z(\hat{y}) & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} t_z(\hat{z})
 \end{array} = \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{xx} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{xy} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{xz} \\
 \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{yx} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{yy} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{yz} \\
 \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{zx} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{zy} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{zz}
 \end{array}
 \end{array} \quad (A.1)$$

Como se encuentra en equilibrio estático, no hay rotación neta de parte de los esfuerzos tangenciales, por lo que el balance de los torques da  $t_{xz} = t_{zx}$ ,  $t_{xy} = t_{yx}$  y  $t_{yz} = t_{zy}$ . Con esto el tensor esfuerzo es simétrico

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc} \square & & \square \end{array} \\
 \tau = \tau^T = \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{xx} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{xy} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{xz} \\
 \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{xy} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{yy} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{yz} \\
 \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{xz} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{yz} & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \tau_{zz}
 \end{array} \quad (A.2)$$

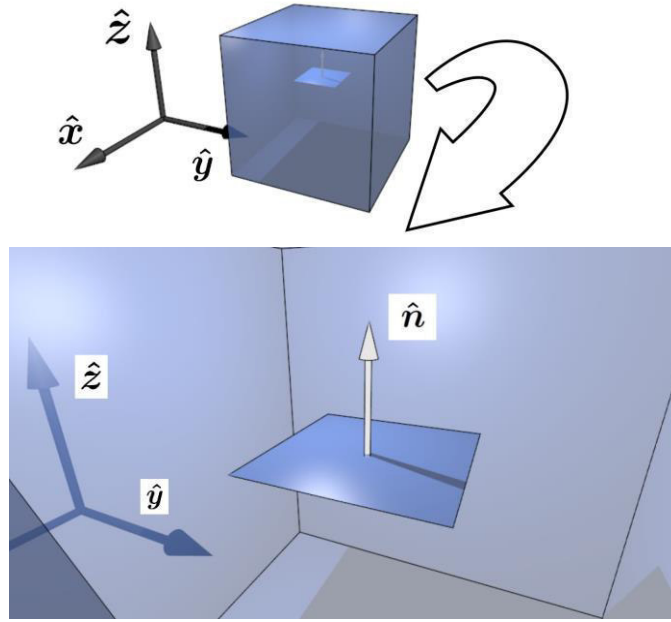
$\tau$  contiene solo seis elementos independientes, con los que se describe completamente el esfuerzo en un punto determinado dentro del medio. Siendo  $\hat{n} = (\hat{n}_x, \hat{n}_y, \hat{n}_z)$  podemos escribir la fuerza en dirección x por unidad de área,  $t_x(\hat{n})$  como:

$$t_x(\hat{n}) = \underbrace{\tau_{xx}\hat{n}_x}_{(I)} + \underbrace{\tau_{xy}\hat{n}_y}_{(II)} + \underbrace{\tau_{xz}\hat{n}_z}_{(III)} = \underbrace{t_x(\hat{x})\hat{n}_x}_{(I)} + \underbrace{t_x(\hat{y})\hat{n}_y}_{(II)} + \underbrace{t_x(\hat{z})\hat{n}_z}_{(III)}$$

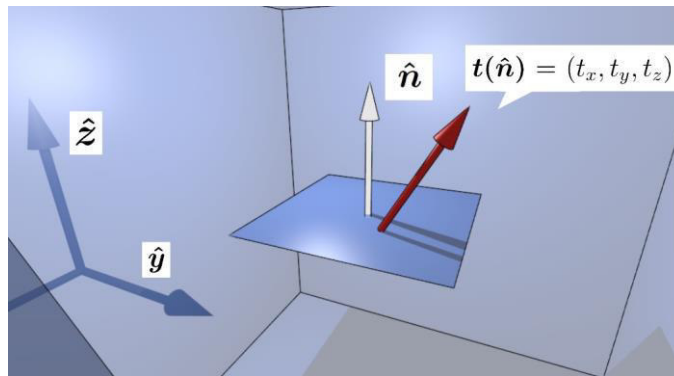
(I) es la contribución del esfuerzo normal del plano  $\hat{x}$  a  $t_x$ .

(II) es la contribución del esfuerzo tangencial del plano  $\hat{y}$  a  $t_x$ .

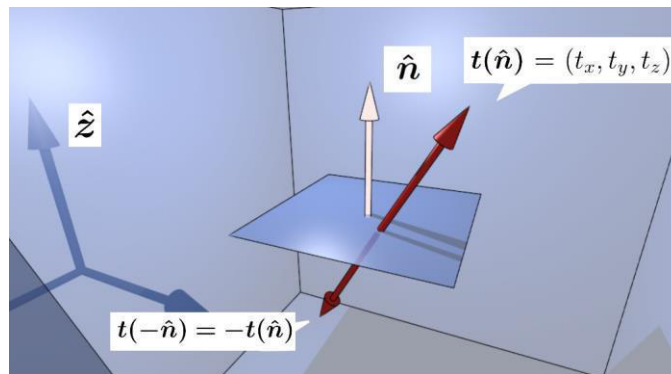
(III) es la contribución del esfuerzo tangencial del plano  $\hat{z}$  a  $t_x$ .



(a) Superficie arbitraria dentro del cuerpo.

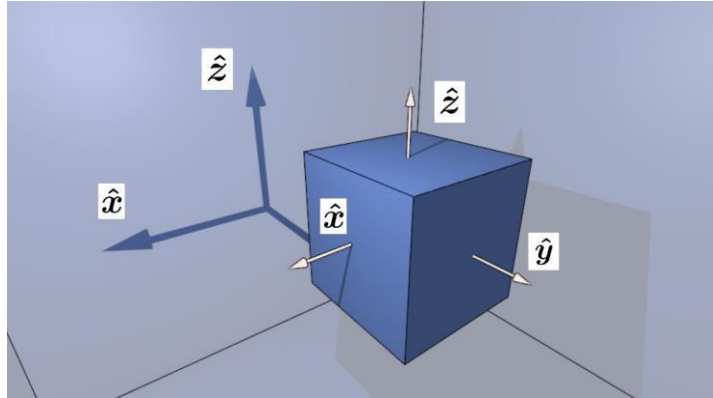


(b) Vector tracción en la superficie interior del cuerpo.

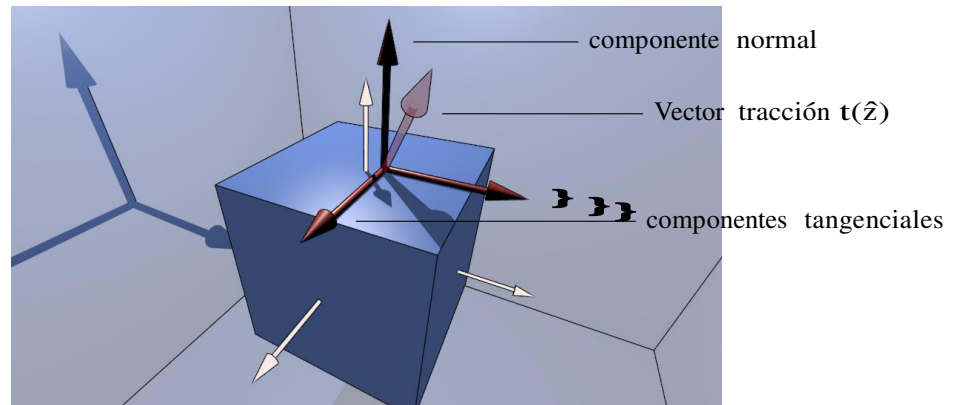


(c) Fuerzas opuestas que mantienen el equilibrio.

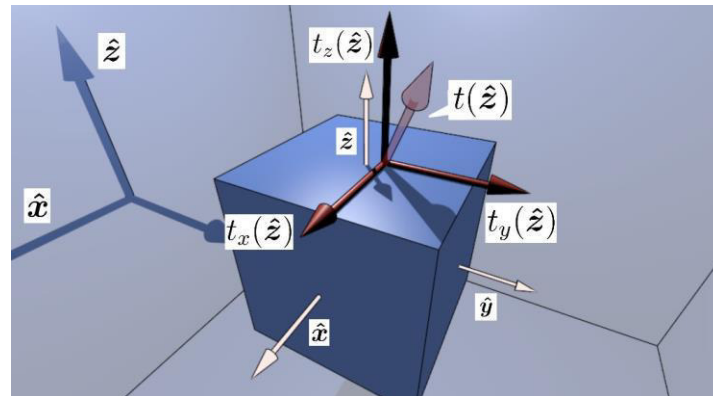
Figura A.1: Tenemos un cuerpo elástico homogéneo en equilibrio estático (A.1a). Dentro seleccionamos un diferencial de superficie determinado por el vector unitario normal  $\hat{n}$ . Sobre esta cara actúa una fuerza  $\mathbf{t}(\hat{n})$  (A.1b). Para mantener el equilibrio (A.1c), en el lado opuesto existe una fuerza igual y opuesta  $\mathbf{t}(-\hat{n}) = -\mathbf{t}(\hat{n})$ .



(a) Tres diferenciales de superficie orientados según los ejes coordenados. Toda superficie se expresa como combinación lineal de estas superficies.

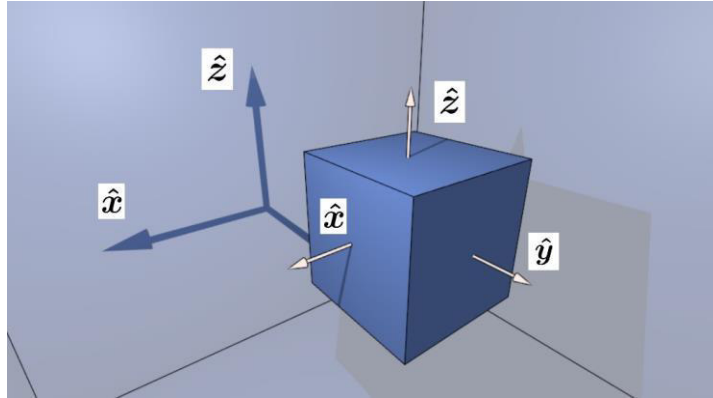


(b) Vector tracción  $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{z}})$  desvanecido en la figura mostrando sus tres componentes.

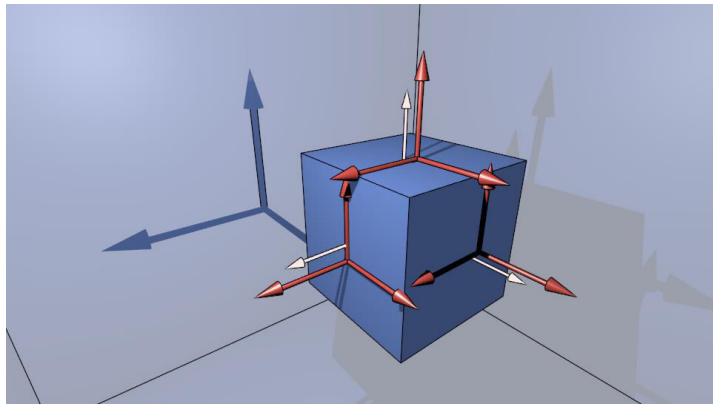


(c) Vector tracción y sus componentes sobre el diferencial de superficie que se encuentra en el interior del cuerpo elástico homogéneo en equilibrio estático.

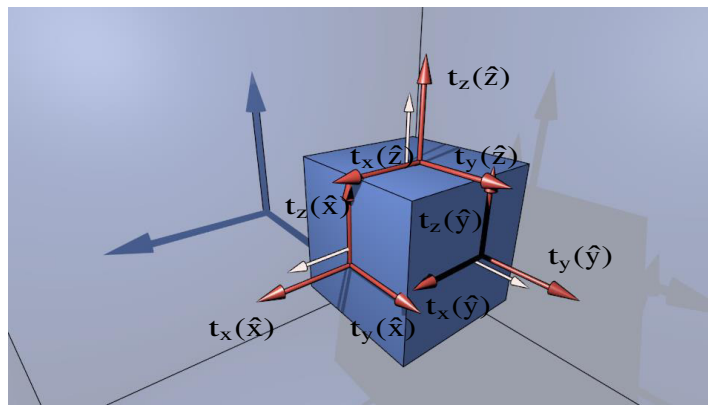
Figura A.2: Dentro de un cuerpo elástico homogéneo en equilibrio estático determinamos superficies orientadas según los vectores base unitarios (A.2a). Sobre la cara orientada según  $\hat{\mathbf{z}}$  se muestra el vector tracción correspondiente y sus tres componentes (A.2b).



(a) Diferenciales de superficie que son la base de una superficie arbitraria  $\hat{n} = \hat{n}_x \hat{x} + \hat{n}_y \hat{y} + \hat{n}_z \hat{z}$  dentro de un cuerpo elástico homogéneo en equilibrio estático.



(b) Las nueve componentes de los Vectores tracción de los diferenciales de superficie.



(c) Componentes del tensor esfuerzo al lado de las componentes de los Vectores tracción al cual están asociados.

Figura A.3: Dentro del cuerpo elástico homogéneo en equilibrio estático se muestran las tres componentes de los tres vectores tracción. Las nueve componentes caracterizan el esfuerzo en puntos interiores del cuerpo, y en conjunto forman el tensor esfuerzo. El vector tracción  $\mathbf{t}$  para una superficie determinada  $\hat{n}$  (la cual es combinación lineal de los diferenciales de superficie  $\hat{n} = \hat{n}_x \hat{x} + \hat{n}_y \hat{y} + \hat{n}_z \hat{z}$ ) se obtiene al multiplicar esta superficie por la derecha del tensor esfuerzo.

(A.2):

$$\mathbf{t}_y(\hat{\mathbf{n}}) = \underbrace{\tau_{\mathbf{y}\mathbf{x}}}_{\text{(IV)}} \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\tau_{\mathbf{y}\mathbf{y}}}_{\text{(V)}} \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{y}} + \underbrace{\tau_{\mathbf{y}\mathbf{z}}}_{\text{(VI)}} \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{z}} = \mathbf{t}_y(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{x}} + \mathbf{t}_y(\hat{\mathbf{y}})\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{y}} + \mathbf{t}_y(\hat{\mathbf{z}})\hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{t}_z(\hat{\mathbf{n}}) = \underbrace{\tau_{\mathbf{z}}^{\mathbf{xz}} \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{z}}^{\mathbf{x}}}_{\text{(VII)}} + \underbrace{\tau_{\mathbf{z}}^{\mathbf{yz}} \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{z}}^{\mathbf{y}}}_{\text{(VIII)}} + \underbrace{\tau_{\mathbf{z}}^{\mathbf{zz}} \hat{\mathbf{n}}_{\mathbf{z}}^{\mathbf{z}}}_{\text{(IX)}} = t_z(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{n}}_x + t_z(\hat{\mathbf{y}})\hat{\mathbf{n}}_y + t_z(\hat{\mathbf{z}})\hat{\mathbf{n}}_z$$

(IV) es la contribucion del esfuerzo tangencial del plano  $\hat{x}$  a  $t_y$ .

(V) es la contribucion del esfuerzo normal del plano  $\hat{y}$  a  $t_y$ .

(VI) es la contribucion del esfuerzo tangencial del plano  $\hat{z}$  a  $t_y$ .

(VII) es la contribucion del esfuerzo tangencial del plano  $\hat{x}$  a  $t_z$ .

(VIII) es la contribución del esfuerzo tangencial del plano  $\hat{y}$  a  $t_z$ .

(IX) es la contribucion del esfuerzo normal del plano  $\hat{z}$  a  $t_z$ .

El peso de las contribuciones lo dan las componentes de  $\hat{\mathbf{n}} = (\hat{\mathbf{n}}_x, \hat{\mathbf{n}}_y, \hat{\mathbf{n}}_z)$ . Agrupando las componentes de  $\mathbf{t}_x(\hat{\mathbf{n}})$ ,  $\mathbf{t}_y(\hat{\mathbf{n}})$  y  $\mathbf{t}_z(\hat{\mathbf{n}})$  en forma de matriz <sup>3</sup>

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \begin{bmatrix} t_x(\hat{\mathbf{n}}) \\ t_y \\ t_z(\hat{\mathbf{n}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{n}_x \\ \hat{n}_y \\ \hat{n}_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\tau} \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{A.4})$$

Como vemos, si queremos obtener el vector tracción en un determinado plano  $\hat{n}$ , multiplicamos el vector esfuerzo que caracteriza el medio por  $\hat{n}$ .

## A.2. Deformación unitaria

Consideremos ahora la descripción de los cambios de posición de puntos dentro de un medio continuo. Siendo  $\mathbf{r}_0$  la posición en un tiempo inicial y  $\mathbf{r}$  la posición en

<sup>3</sup>Con  $\hat{n} = (\hat{n} \cdot \hat{x}, \hat{n} \cdot \hat{y}, \hat{n} \cdot \hat{z}) = (\cos(\hat{n}, \hat{x}), \cos(\hat{n}, \hat{y}), \cos(\hat{n}, \hat{z}))$ 

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \begin{pmatrix} \tau_x(\hat{\mathbf{n}}) \\ \tau_y(\hat{\mathbf{n}}) \\ \tau_z(\hat{\mathbf{n}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{x}}) \\ \cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{y}}) \\ \cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{z}}) \end{pmatrix} = \tau \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{A.3})$$

un tiempo  $t$ , el campo de desplazamiento es

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 \quad (\text{A.5})$$

Este enfoque es Lagrangiano a diferencia del enfoque Euleriano que es usado en fluidos.

Consideremos el desplazamiento  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  a la posición  $\mathbf{x}$ , una pequeña distancia lejos de la posición de referencia  $\mathbf{x}_0$ . Expandiendo  $\mathbf{u}$  en una serie de Taylor

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{J} \mathbf{d} \quad (\text{A.7})$$

donde los términos de mayor orden se han ignorado asumiendo que las derivadas parciales  $\partial u_x / \partial x, \partial u_y / \partial x \dots$  son lo suficientemente pequeñas para que sus productos se ignoren. En sismología esta aproximación es válida. Se verifica que  $\mathbf{J}$  se puede separar en una matriz simétrica y una antisimétrica

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{e} + \mathbf{\Omega} \quad (\text{A.8})$$

El tensor deformación unitaria es  $\mathbf{e}$ , simétrico

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

El tensor rotación es  $\Omega$ , antisimétrico

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} & -\frac{1}{2} \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad (A.10)$$

El tensor rotación  $\Omega$  representa la rotación rígida, no produce deformación y el tensor deformación unitaria  $e$  representa la deformación interna.

El incremento de volumen relativo, dilatación  $\Delta = (V - V_0)/V_0$ , se calcula sumando las variaciones del desplazamiento  $\partial u_i$  en su respectiva dirección  $i$ .

$$\Delta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \text{tr}[e] = \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (A.11)$$

donde  $\text{tr}[e]$  es la traza de  $e$ . Notamos que la dilatación está dada por la divergencia del campo de desplazamiento.

Es útil la representación de  $e$  con índices

Tensor deformación unitaria

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \quad (A.12)$$

donde  $i, j$  van de 1 a 3.

### A.3. Relación lineal entre esfuerzo y deformación unitaria

La relación más general entre el tensor esfuerzo y el tensor deformación unitaria se escribe

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} \equiv \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 c_{ijkl} e_{kl} \quad (A.13)$$

donde  $c_{ijkl}$  es el tensor elástico y se usa la convención de suma con índices. La ecuación A.13 es conocida como la ley de Hooke generalizada, la cual asume elasticidad perfecta, no hay pérdida de energía mientras el material se deforma debido al



esfuerzo aplicado. Un solido que cumple A.13 es llamado linealmente elastico. Notar que no hay dependencia del tensor esfuerzo  $\tau_{ij}$  con el tensor rotación  $\Omega$ , no es afectado por una rotacion rígida.

El tensor elástico tiene 81 ( $3^4$ ) componentes. Por consideraciones de simetría, termodinamicas y asumiendo un medio isotropico se muestra que el número de parametros independientes se reduce a dos:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl}) \quad (A.14)$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son llamados parámetros de Lamé del material y  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  para  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ ). Los parámetros de Lamé estan relacionados con las velocidades sísmicas en el material. La ecuacion que relaciona el esfuerzo y la deformacion unitaria para un solido isotrópico es

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ik} \delta_{jl})] e_{kl} \\ \tau_{ij} &= \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} \end{aligned} \quad (A.15)$$

donde se ha usado la simetría  $e_{ij} = e_{ji}$ . Los dos parámetros de Lamé describen por completo la relación entre el esfuerzo y la deformación unitaria dentro de un solido isotropico.  $\mu$  es conocido como el modulo tangencial o cizallante y es una medida de la resistencia del material al desplazamiento tangencial. El otro parametro de Lamé  $\lambda$  no tiene explicación física simple.

Remplazando A.12 tenemos

<p>Tensor esfuerzo de un medio Linealmente Elastico</p> $\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \partial_k u_k + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$	<p>(A.16)</p>
--	---------------

por ejemplo tenemos:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \tau_{12} &= \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \\ \tau_{13} &= \mu \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \end{aligned} \quad (A.17)$$

## A.4. Ecuación de movimiento

Consideramos el balance de fuerzas en un elemento cúbico dentro de un medio continuo que experimenta movimientos internos. Sea la fuerza cuerpo  $\mathbf{f} = f_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + f_2 \hat{\mathbf{x}}_2 + f_3 \hat{\mathbf{x}}_3$ , la densidad del material es  $\rho$ . Aplicando la segunda ley de Newton <sup>4</sup> (Lay y Wallace, 1995)

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A.18})$$

Esta ecuación es conocida como la ecuación de movimiento para un continuo. Relaciona la aceleración con la fuerza cuerpo y el gradiente de esfuerzo en el medio. Esta ecuación es fundamental en sismología, ya que relaciona fuerzas en el medio con los desplazamientos, los cuales son medibles.

Si no se consideran las fuerzas cuerpo, como la gravedad, tenemos la ecuación homogénea de movimiento

$$\rho \ddot{u}_i = \tau_{ij,j} \quad (\text{A.19})$$

usando la notación de puntos para la derivada temporal y la notación de coma, donde luego de la coma se indica el índice de la variable respecto de la cual se deriva. Para  $i = 1$  tenemos

$$\rho \ddot{u}_1 = \tau_{11,1} + \tau_{12,2} + \tau_{13,3} \quad (\text{A.20})$$

$$\rho \ddot{u}_1 = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3} \quad (\text{A.21})$$

reemplazando las expresiones de (A.17) y asumiendo que  $\lambda$  y  $\mu$  son constantes dentro del medio, es decir sus derivadas son cero, tenemos

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_1 = & \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\ & + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \\ & + \mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

---

<sup>4</sup>La convención de suma de Einstein:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \sum_{i=1}^3 a_i b_i \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ &= a_\mu b_\mu \end{aligned}$$

identificando la divergencia y el laplaciano, escribimos

$$\rho \ddot{u}_1 = (\lambda + \mu) \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 u_1 \quad (\text{A.23a})$$

de manera similar tenemos las ecuaciones para  $u_2$  y  $u_3$

$$\rho \ddot{u}_2 = (\lambda + \mu) \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_2} + \mu \nabla^2 u_2 \quad (\text{A.23b})$$

$$\rho \ddot{u}_3 = (\lambda + \mu) \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_3} + \mu \nabla^2 u_3 \quad (\text{A.23c})$$

y escribimos en la forma vectorial

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (\text{A.24})$$

la cual es la ecuación vectorial tridimensional homogénea para un medio uniforme, isotropico y linealmente elastico. Usando la identidad vectorial

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) \quad (\text{A.25})$$

podemos escribir (A.24) como

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) \quad (\text{A.26})$$

es una ecuacion diferencial parcial tridimensional, que describe el desplazamiento en un medio continuo, para una fuente no especificada.

## A.5. Elastoestática

Se busca determinar el desplazamiento estático  $\mathbf{u}$  en el punto  $P$  en un medio elastico isotropico, infinito, homogéneo con densidad  $\rho$  y constantes elásticas  $\lambda, \mu$  debido a una fuerza en el punto  $O$ . A distancias grandes de la fuente  $\mathbf{u} = 0$ . Definimos la fuerza punto  $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \rho \mathbf{f} \delta V \quad (\text{A.27})$$

donde  $\mathbf{f}$  es la fuerza por unidad de masa,  $\rho \mathbf{f}$  es la fuerza cuerpo por unidad de volumen, y  $\delta V$  es el pequeño volumen donde actúa la fuerza.

Con la funcion delta tridimensional  $\delta(\mathbf{r})$

$$\delta(\mathbf{r}) = \begin{cases} \infty & \mathbf{r} = 0 \\ 0 & \mathbf{r} \neq 0 \end{cases} \quad \int_V \delta(\mathbf{r}) dV = 1 \quad (\text{A.28})$$

y con el teorema de Gauss <sup>5</sup>se puede mostrar que

$$\delta(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{r} \quad (\text{A.29})$$

la cual expresa la función delta con las derivadas espaciales de la coordenada radial  $r$ . Consideremos una fuerza punto en el origen

$$\mathbf{F} = F \delta(\mathbf{r}) \mathbf{a} = -F \nabla^2 \frac{\mathbf{a}}{4\pi r} \quad (\text{A.30a})$$

$$= -F \nabla \cdot \nabla \frac{\mathbf{a}}{4\pi r} - \nabla \times \nabla \times \frac{\mathbf{a}}{4\pi r} \quad (\text{A.30b})$$

donde  $\mathbf{a}$  es un vector unitario en dirección de la fuerza y se ha usado la identidad (A.25)  $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u})$ .

### A.5.1. Campo de desplazamiento estático debido a una sola fuerza

Ahora usamos la representación matemática de la fuerza punto (A.30) en la ecuación elástica para el equilibrio (A.26), con  $\ddot{\mathbf{u}} = 0$

$$\mathbf{F} + (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{A.31})$$

$$-F \nabla \cdot \nabla \frac{\mathbf{a}}{4\pi r} - \nabla \times \nabla \times \frac{\mathbf{a}}{4\pi r} = -(\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) \quad (\text{A.32})$$

Buscamos una solución de la forma <sup>6</sup>

---

<sup>5</sup>Teorema de Gauss: Siendo  $V$  un volumen con superficie  $S$

$$\int_V (\nabla \cdot \Psi) dV = \int_S (\mathbf{n} \cdot \Psi) dS$$

donde  $\mathbf{n}$  es un vector unitario normal en cada parte de la superficie  $S$ .

<sup>6</sup>Teorema de Helmholtz: Todo campo vectorial se puede representar en términos de un vector potencial  $\Psi$  y un escalar potencial  $\phi$  como

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \Psi$$

si

$$\begin{aligned} \nabla \times \phi &= 0 & (\phi \text{ es irrotacional}) \\ \nabla \cdot \Psi &= 0 & (\Psi \text{ es solenoidal}). \end{aligned}$$

$$\mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}_p) - (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_s) \quad (\text{A.33})$$

donde

$$\begin{aligned} \square \quad \square \quad \nabla \times \mathbf{A}_p &= 0 \quad \therefore \text{usando (A.25)} \quad \nabla^2 \mathbf{A}_p = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}_p) \\ \nabla \cdot \mathbf{A}_s &= 0 \quad \therefore \text{usando (A.25)} \quad \nabla^2 \mathbf{A}_s = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}_s \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

cumpléndose así las condiciones

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{A}_p) &= 0 \quad (\nabla \cdot \mathbf{A}_p \text{ es irrotacional}) \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}_s) &= 0 \quad (\nabla \times \mathbf{A}_s \text{ es solenoidal}). \end{aligned}$$

basandonos en el hecho de que cualquier campo de desplazamiento puede ser representado como la suma de un campo irrotacional y un campo solenoidal. Sustituyendo esta solución en (A.32)

$$\nabla \cdot \nabla \cdot \frac{-F \mathbf{a}}{4\pi r} + (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{A}_p + \nabla \times \nabla \times \frac{F \mathbf{a}}{4\pi r} - \mu \nabla^2 \mathbf{A}_s = 0 \quad (\text{A.35})$$

la cual se satisface con

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \mathbf{A}_p &= \frac{F \mathbf{a}}{4\pi r} \\ \mu \nabla^2 \mathbf{A}_s &= \frac{F \mathbf{a}}{4\pi r} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Si escribimos:  $\mathbf{A}_p = A_p \mathbf{a}$  y  $\mathbf{A}_s = A_s \mathbf{a}$ , pues  $A_p$  y  $A_s$  tienen la dirección de  $\mathbf{a}$  (vector unitario en dirección de la fuerza), obtenemos las ecuaciones de Poisson

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_p &= \frac{F}{4\pi(\lambda + 2\mu)r} \\ \nabla^2 A_s &= \frac{F}{4\pi\mu r} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

ya que  $\nabla^2 r = 2/r$  podemos integrar y tenemos

---

También recordamos que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \Psi) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \phi) &= 0 \end{aligned}$$

$$A_p = \frac{F r}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \quad (A.38)$$

$$A_s = \frac{F r}{8\pi\mu}$$

esto resuelve las ecuaciones no homogéneas (A.36). Reemplazando (A.38) en (A.33), usando la notación de índices <sup>7</sup>, tenemos la componente  $i$ -ésima del desplazamiento para una fuerza unidad ( $F = 1$ ) actuando en la dirección  $j$ ,  $u_i^j$ :

$$\begin{aligned} u_i^j &= \frac{1}{8\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} - \frac{1}{8\pi\mu} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} + \delta_{ij} \frac{1}{8\pi\mu} \nabla^2 r \\ &= \frac{1}{8\pi\mu} \delta_{ij} \nabla^2 r - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned} \quad (A.39)$$

Tensor Somigliana

$$u_i^j = \frac{1}{8\pi\mu} (\delta_{ij} r_{,kk} - \Gamma r_{,ij}) \quad (A.40)$$

donde

$$\Gamma = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}$$

7

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{a} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} a_i \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} a_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} a_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} a_3 \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} a_\mu = \partial_\mu a_\mu \end{aligned}$$

$$(\nabla \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{i\alpha\beta} \partial_\alpha b_\beta \quad \text{el rotacional}$$

$$\varepsilon_{\alpha j k} \varepsilon_{\alpha l m} = \delta_{j l} \delta_{k m} - \delta_{j m} \delta_{l k} \quad \text{relación entre } \varepsilon_{i j k} \text{ y } \delta_{i j}$$

Donde  $\varepsilon_{i j k}$  es el tensor Levi-Civita, símbolo de permutación,

$$\varepsilon_{i j k} = \begin{cases} 1 & \text{Si los índices están en orden cíclico} \\ -1 & \text{Si los índices están en orden cíclico inverso} \\ 0 & \text{Si hay índices repetidos} \end{cases}$$

Notar que el vector desplazamiento estático  $u$ , en el tensor Somigliana, para una fuerza punto es simétrico:  $u_i^j = u_j^i$ .

## A.6. Dislocación de Volterra

En la teoría de elasticidad de dislocaciones consideramos un cuerpo elástico infinito o finito, sobre el cual no actúan fuerzas externas y está en reposo. Lo entendemos como se explica a continuación (Takuo, 1964). Imaginamos que se hace un corte y forma una superficie abierta  $\Sigma$  que quizá esté situada completamente en el interior del cuerpo, y las dos caras del corte deformadas de manera diferente debido a la aplicación de algunas distribuciones de fuerzas. Si estas distribuciones de fuerzas están en equilibrio estático el estado deformado también estará en equilibrio. Lo descrito es llamado una dislocación sobre  $\Sigma$ . Llamamos a la superficie  $\Sigma$  la superficie de dislocación y al borde  $\sigma$  de  $\Sigma$  la línea de dislocación.

Para orientarnos elegimos una dirección positiva para la línea de dislocación  $\sigma$ . Luego con la regla de la mano derecha elegimos la dirección del vector unitario  $v$  que apunta hacia afuera y es normal a  $\Sigma$ , considerando positiva la dirección de rotación a lo largo de la línea de dislocación  $\sigma$ . Las caras exterior e interior de  $\Sigma$  se determinan también con la regla de la mano derecha, el vector normal  $v$  va de la cara interior a la exterior. Las caras exterior e interior, del corte hecho sobre  $\Sigma$ , se designan con  $\Sigma^+$  y  $\Sigma^-$  respectivamente.

La dislocación entonces se determina por la forma de la superficie  $\Sigma$  y por la discontinuidad  $\Delta u_k$  en las componentes del vector desplazamiento en el lugar geométrico del corte, esto es

$$\Delta u_k = u_k^+ - u_k^- \quad (A.41)$$

donde  $u_k^+$  es el vector desplazamiento de un punto  $\cdot^+$ , originalmente en  $\cdot$  sobre  $\Sigma$  pero situado ahora sobre  $\Sigma^+$ , y  $u_k^-$  es el vector desplazamiento para el correspondiente punto  $\cdot^-$ , el cual ahora está sobre  $\Sigma^-$ . Está claro que el borde  $\sigma$  de  $\Sigma$  será en general una singularidad. Siguiendo a Stoketee (Stoketee, 1958) tenemos para la dislocación de Volterra (conocida como dislocación Volterra-Weingarten) que la discontinuidad en las componentes del desplazamiento son

$$\Delta u_k = u_k^+ - u_k^- = b_k + \Omega_{kj} \xi_j \quad (A.42)$$

$$\Omega_{kj} = -\Omega_{jk}$$

donde  $b_k$  y  $\Omega_{kj}$  son constantes y  $\xi_j$  es la coordenada de  $\cdot$  en  $\sigma$ . La expresión (A.42) es conocida como la relación Weingarten, establece que la discontinuidad  $\Delta u_k$  en la

region geométrica de  $\sigma$  debe ser del tipo de un desplazamiento de cuerpo rígido (no genera ningún esfuerzo ni deformación unitaria). Si se considera  $\Omega_{kj} = 0$  entonces  $b_k$  es llamado el vector de Burgers.

Volterra, 1907, obtuvo la siguiente expresión para el campo de desplazamiento debido a una dislocación del tipo (A.42) en un medio infinito, la componente  $m$  del vector desplazamiento en un punto arbitrario  $Q(x_1, x_2, x_3)$ ,  $u_m(Q)$  está determinado por

$$\begin{aligned} &\text{Campo de Desplazamiento} \\ &u_m(Q) = \frac{1}{4\pi\mu} \int_{\Sigma} \Delta u_k(P) \tau_{kl}^m(P, Q) v_l(P) d\Sigma \end{aligned} \quad (A.43)$$

donde  $P$  es un punto sobre  $\Sigma$  donde se toma la integral y  $\tau_{kl}^m(P, Q)$  es la componente  $(kl)$  del tensor esfuerzo en  $P$  debido a una fuerza cuerpo unidad en la dirección  $m$  localizado en  $Q$ .

Una fuerza cuerpo en la dirección  $m$  en  $Q$  genera un campo de desplazamiento en  $P$ , cuya componente  $k$  está determinada por (A.40)

$$U_k^m(P, Q) = \frac{1}{8\pi\mu} (\delta_{km} r_{,nn} - \Gamma r_{,km}) \quad (A.44)$$

$r$  es la distancia desde  $P(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  a  $Q(x_1, x_2, x_3)$ ,  $r_{,n} = \partial r / \partial \xi_n$ ,  $r_{,mk} = \partial^2 r / \partial \xi_m \partial \xi_k$ . De la definición

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$$

llegamos a

$$r^{,m} = -r_{,m} \quad (A.45)$$

donde  $r^{,m} = \partial r / \partial x_m$ . Con esto y recordando la simetría

$$U_k^m(P, Q) = U_m^k(P, Q) \quad (A.46)$$

tenemos

$$U_k^m(P, Q) = U_k^m(Q, P) \quad (A.47)$$

lo que muestra que (A.44) puede ser también considerada como el campo de desplazamiento en  $Q$  debido a una fuerza cuerpo unidad localizada en  $P$ . Con esto el



tensor esfuerzo (A.16)

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} \partial_k U_k + \mu (\partial_i U_j + \partial_j U_i)$$

lo escribimos como

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} U_{k,k} + \mu (U_{j,i} + U_{i,j})$$

para una fuerza cuerpo en direccion m y regresando a la notación (A.47)

<p>Tensor esfuerzo</p> $\tau_{kl}^m(P, Q) = \lambda \delta_{kl} U_{n,n}^m + \mu (U_{l,k}^m + U_{k,l}^m)$	(A.48)
--	--------

Esta última ecuación, considerando (A.45), (A.40) y (A.47), puede escribirse como

$$\tau_{kl}^m(P, Q) = -\lambda \delta_{kl} U_m^{n,n} - \mu (U_m^{l,k} + U_m^{k,l}) \quad (A.49)$$

De esta manera se evidencia que los diferentes componentes pueden considerarse como resultantes de los efectos de pares de fuerzas opuestas en la direccion i que no producen torque, y de tres pares de dobles fuerzas mutuamente perpendiculares que producen torque, en las cercanías de P.

El siguiente cuadro resume lo discutido a partir de la simetría (A.46):

$U_k^m(P, Q)$	$U_k^m(Q, P)$
$P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \Sigma$ $Q(x_1, x_2, x_3) \in \text{Region arbitraria}$	$P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \Sigma$ $Q(x_1, x_2, x_3) \in \text{Region arbitraria}$
$\tau_{kl}^m(P, Q)$ tensor esfuerzo en P debido a una fuerza en Q	$\tau_{kl}^m(P, Q)$ tensor esfuerzo en Q debido a una fuerza en P
$U_{n,\beta}^m$ $\partial_\beta \in \Sigma$	$U_n^{m,\beta}$ $\partial_\beta \in \text{Region arbitraria}$

## A.7. Deformación superficial de Okada

[Steketee, 1958](#), mostró que el campo de desplazamiento  $u_i(x_1, x_2, x_3)$  debido a una dislocación  $\Delta u_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  en la vecindad de una superficie  $\Sigma$  en un medio isotrópico está dado por <sup>8</sup>([Okada, 1992](#))

$$u_i = \frac{1}{F} \int_{\Sigma} \Delta u_j \left[ \lambda \delta_{jk} \frac{\partial u_i^n}{\partial \xi_n} + \mu \left( \frac{\partial u_i^j}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_k^j}{\partial \xi_i} \right) \right] v_k d\Sigma \quad (A.50)$$

Esta expresión la da Okada. Por ejemplo para una superficie  $\Sigma$  con vector unitario normal

$$\mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \hat{x})\hat{x} + (\mathbf{n} \cdot \hat{y})\hat{y} + (\mathbf{n} \cdot \hat{z})\hat{z}$$

tenemos

$$\begin{aligned} v_1 &= \mathbf{n} \cdot \hat{x} \\ v_2 &= \mathbf{n} \cdot \hat{y} \\ v_3 &= \mathbf{n} \cdot \hat{z} \end{aligned} \quad (A.51)$$

si  $\mathbf{n}$  tiene componente cero en  $\hat{x}$ , es decir se encuentra en el plano  $YZ$ , entonces  $v_1 = 0$ . Considerando

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= U_1 \\ \Delta u_2 &= U_2 \\ \Delta u_3 &= U_3 \end{aligned} \quad (A.52)$$

para el caso Strike-slip (es decir  $\lambda = 0^0$ ),  $U_2 = U_3 = 0$ , la contribución del elemento  $\Delta \Sigma$  se escribe

$$\frac{1}{F} \mu U_1 \Delta \Sigma \left[ \frac{\partial u_1^1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial u_2^1}{\partial \xi_1} \right] v_2 + \left[ \frac{\partial u_1^1}{\partial \xi_3} + \frac{\partial u_3^1}{\partial \xi_1} \right] v_3 \quad (A.53)$$

Luego de hallar el campo de desplazamiento  $u_i^j$  en  $(x_1, x_2, 0)$  (es decir para puntos en la superficie) para una fuerza punto ubicada en  $(0, 0, -d)$  en los casos strike-slip, dip-slip y tensile fault, Okada realiza una integración sobre una fuente rectangular de largo  $L$  y ancho  $W$ , donde se tiene para el campo de desplazamiento en el caso strike-slip:

---

<sup>8</sup>Usando el Campo de desplazamiento (A.43), aplicando la simetría (A.46) y el tensor esfuerzo (A.48)

$$\begin{aligned}
u_x &= -\frac{U_1}{2\pi} \frac{\xi q}{R(R + \eta)} + \arctan \frac{\xi \eta}{qR} + I_1 \sin \delta \\
u_y &= -\frac{U_1}{2\pi} \frac{\tilde{y}q}{R(R + \eta)} + \frac{q \cos \delta}{R + \eta} + I_2 \sin \delta \\
&\quad \text{"} \quad \quad \quad \# \\
u_z &= -\frac{U_1}{2\pi} \frac{\tilde{d}q}{R(R + \eta)} + \frac{q \sin \delta}{R + \eta} + I_4 \sin \delta
\end{aligned} \tag{A.54}$$

y dip-slip

$$\begin{aligned}
u_x &= -\frac{U_2}{2\pi} \frac{h}{R} q - I_3 \sin \delta \cos \delta \\
u_y &= -\frac{U_2}{2\pi} \frac{\tilde{y}q}{R(R + \xi)} + \cos \delta \arctan \frac{\xi \eta}{qR} - I_1 \sin \delta \cos \delta \\
&\quad \text{"} \quad \quad \quad \# \\
u_z &= -\frac{U_2}{2\pi} \frac{\tilde{d}q}{R(R + \xi)} + \sin \delta \arctan \frac{\xi \eta}{qR} - I_4 \sin \delta \cos \delta
\end{aligned} \tag{A.55}$$

donde las barras paralelas k corresponden a la notación de Chinnery que representa la sustitución resultado de la integración sobre la fuente rectangular.

$$f(\xi, \eta) k = f(x, p) - f(x, p - W) - f(x - L, p) + f(x - L, p - W) \tag{A.56}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{-1}{\cos \delta} \frac{\xi}{R + d} - \frac{\sin \delta}{\cos \delta} I_5 \\
I_2 &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} [-\ln(R + \eta)] - I_3 \\
I_3 &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\cos \delta} \frac{\tilde{y}}{R + \tilde{d}} - \ln(R + \eta) + \frac{\sin \delta}{\cos \delta} I_4 \\
I_4 &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\cos \delta} [\ln(R + \tilde{d}) - \sin \delta \ln(R + \eta)] \\
I_5 &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{2}{\cos \delta} \arctan \frac{\eta(X + q \cos \delta) + X(R + X) \sin \delta}{\xi(R + X) \cos \delta}
\end{aligned} \tag{A.57}$$

$$\begin{aligned}
\begin{array}{l} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} p &= y \cos \delta + d \sin \delta \\
\begin{array}{l} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} q &= y \sin \delta - d \cos \delta \\
\begin{array}{l} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \tilde{y} &= \eta \cos \delta + q \sin \delta \\
\begin{array}{l} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} \tilde{d} &= \eta \sin \delta - q \cos \delta \\
\begin{array}{l} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} R^2 &= \xi^2 + \eta^2 + q^2 \\
\begin{array}{l} \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{array} X^2 &= \xi^2 + q^2
\end{aligned}
\tag{A.58}$$

# Apéndice B

## Ondas en el océano

### B.1. Cinemática de ondas

Si el medio es homogéneo al menos en la escala de las ondas, para ondas de pequeñas amplitudes (es decir linealizadas) encontramos soluciones en la forma de ondas planas ([Pedlosky, 2003](#)). Si  $\varphi(x_i, t)$  es un campo variable como la presión

$$\varphi(x, t) = \varphi(x_i, t) = \text{Re } A \exp(\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \quad (\text{B.1})$$

donde

$A$  Amplitud de la onda

$\mathbf{K}$  Vector de onda

$\omega$  Frecuencia angular de la onda

$\text{Re}$  Indica que se toma la parte real

Definimos la fase de la onda  $\theta$

$$\theta(x, t) = \mathbf{k}_i x_i - \omega t \quad (\text{B.2})$$

La dirección normal a las superficies de  $\theta$  constante están dadas por

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = k_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = k_j \delta_{ij} = k_i \quad (\text{B.3})$$

$$\nabla \theta = \mathbf{K} \quad (\text{B.4})$$

El periodo espacial es  $\lambda$ , y se relaciona con el modulo de  $\mathbf{K}$

$$\lambda = \frac{2\pi}{K} \quad (\text{B.5})$$

$\lambda$  es la longitud de onda, la distancia a lo largo del vector de onda entre dos puntos de igual fase.

Para un punto fijo, la razón de cambio de la fase respecto al tiempo es

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\omega \quad (\text{B.6})$$

el periodo temporal es  $T$ , y se relaciona con la frecuencia

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\text{B.7})$$

La rapidez del movimiento de una superficie de fase constante

$$\theta = k_i x_i - \omega t = K s - \omega t \quad (\text{B.8})$$

la encontramos como

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial \theta / \partial t}{\partial \theta / \partial s} = \frac{\omega}{K} \quad (\text{B.9})$$

Definimos la rapidez de fase como la velocidad de propagación de la fase en la dirección del vector de onda

Rapidez de Fase

(B.10)

$$c = \frac{\omega}{K}$$

Cabe resaltar que la rapidez de fase no es un vector.

El vector de onda y la frecuencia angular tienen una dependencia llamada relación de dispersión que depende de la dinámica del fenómeno

Relación de Dispersión

(B.11)

$$\omega = \Omega(k_j)$$

## B.2. Ondas gravitacionales de superficie

La ecuación de momentum general para un fluido estratificado es

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \kappa \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (\text{B.12})$$

y la ecuación de conservación de la masa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{B.13})$$

donde  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  es la velocidad. La derivada lagrangiana <sup>1</sup> en coordenadas cartesianas es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Ahora consideramos lo siguiente:

- La rapidez de fase es de mayor influencia que la rotación de la Tierra,  $\omega \gg \Omega$
- La fricción es ignorada.
- Ignoramos la no linealidad, comparando  $\partial/\partial t$  con  $\mathbf{u} \cdot \nabla$ , con lo cual  $\omega \gg uK$ , así notamos que la rapidez de fase se considera mayor que la rapidez de las partículas del fluido. Con esta condición la perturbación es transportada por la onda y no por movimientos advectivos.

Con esto, veamos el caso de ondas en la superficie del océano, son ondas en la interfase entre el agua y el aire. Consideramos al aire tan ligero como para aproximar su densidad a cero (eliminando así la presencia de ondas sonoras), y una capa de agua de densidad y profundidad uniformes. Podemos aproximar el movimiento de la onda a un movimiento lineal (al no estar presentes los términos no lineales las olas no romperán) y el medio en el que se propaga, un fluido incompresible, para el cual la conservación de la masa se reduce a <sup>2</sup>

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{B.15})$$

Asumiendo todas estas consideraciones, las ecuaciones de momentum en coordenadas cartesianas, donde los vectores unitarios  $\hat{x}, \hat{y}$  determinan un plano que corresponde a

<sup>1</sup>También es llamada advectiva, substancial o material

<sup>2</sup>Esto no implica directamente que  $\frac{dp}{dt} = 0$ , de por medio hay consideraciones termodinámicas

la superficie del mar en reposo (se ignora la curvatura de la Tierra), y de conservación de la masa se reducen a

Ecuacion Hidrodinamica Ideal

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p - \rho g \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{B.16})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

donde  $\hat{\mathbf{z}}$  es un vector unitario opuesto a la direccion local de la gravedad. El rotacional de la ecuacion de momentum es cero:

$$\frac{\partial \nabla \times \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.17})$$

por tanto si la vorticidad es cero inicialmente o en cualquier instante, seguir siendo cero en el transcurso del tiempo. Lo cual nos permite representar la velocidad con una velocidad potencial  $\phi$  por medio de un gradiente espacial

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (\text{B.18})$$

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Un flujo que satisface esta relacion es llamado un flujo potencial. Por la incompresibilidad

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{B.19})$$

De esta manera la ecuacion de movimiento dentro del fluido se reduce a la solución de la ecuación de Laplace

Ecuacion de Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0$$

(B.20)

La cual no es una ecuacion de onda, ser la condicion de frontera quien nos de las ondas gravitacionales de superficie. La dinámica de estas ondas se encuentra en la superficie.



En la ecuación (B.16) si la densidad constante es absorbida en la presión, podemos escribir

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla(p + gz) \quad (\text{B.21})$$

Si en la tercera componente reemplazamos la velocidad potencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\partial(p + gz)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial t} + p + gz = 0$$

para las tres componentes

$$\nabla \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + p + gz = 0 \quad (\text{B.22})$$

por tanto el interior del paréntesis es igual a una constante <sup>3</sup>, podemos elegir 0

Ecuación Lineal de Bernoulli

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + p + gz = 0$$

(B.23)

### B.2.1. Condiciones de frontera

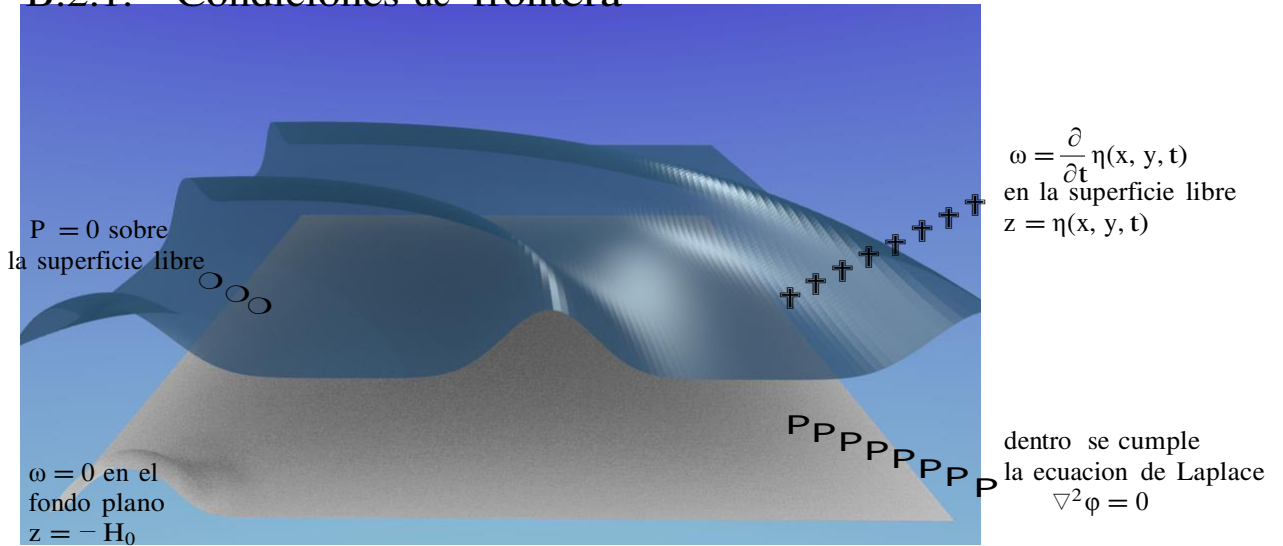


Figura B.1: Ondas gravitacionales de superficie. Condiciones de frontera

<sup>3</sup>De no haber ignorado el término no lineal, se tendría  $u^2$ , en la llamada ecuación de Bernoulli.

$$\nabla \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi + p + gz = 0$$

Consideremos un océano con un fondo plano en  $z = -H_0$  y una superficie libre en  $z = \eta(x, y, t)$ . La condición de frontera en el fondo es

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = -H_0 \quad (\text{B.24})$$

Pues no puede haber flujo a través del fondo del océano. En la parte superior hay dos condiciones de frontera. La condición de frontera cinemática indica que las partículas de fluido en la superficie libre deben permanecer en la superficie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(z - \eta(x, y, t)) &= 0 \\ w \frac{\partial}{\partial z} z - \frac{d}{dt} \eta(x, y, t) &= 0 \\ w - \frac{\partial}{\partial t} \eta(x, y, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla \eta &= 0 \\ w - \frac{\partial}{\partial t} \eta(x, y, t) + \nabla \phi \cdot \nabla \eta &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

El estado de reposo corresponde a  $\phi = \eta = 0$ , aquí la superficie libre es plana, y el campo de velocidades se desvanece. Supongamos que las ondas presentes son muy pequeñas. Con esto las ecuaciones representan un ligero alejamiento del estado de reposo. Por esto  $\phi$  y  $\eta$  son muy pequeños, y los términos proporcionales a los productos de  $\phi$  y  $\eta$  son ignorados en comparación a términos que solo contienen un factor de  $\phi$  y  $\eta$ . Esto linealiza la expresión (B.25), quedando

$$w = \frac{\partial}{\partial t} \eta(x, y, t) \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (\text{B.26})$$

La condición de frontera dinámica establece que la presión debe ser continua en la superficie libre

$$p = p_a \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (\text{B.27})$$

donde  $p_a$  es la presión atmosférica, al considerar cero la densidad del aire, tenemos para ondas libres

$$p = 0 \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (\text{B.28})$$

Ahora juntamos las ecuaciones (B.20) y (B.23)

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{en} \quad -H_0 < z < \eta(x, y, t) \quad (\text{B.29})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + p + gz = 0 \quad \text{en} \quad -H_0 < z < \eta(x, y, t) \quad (\text{B.30})$$

y sus condiciones de frontera

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, -H_0, t) = 0 \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, \eta(x, y, t)) = \frac{\partial}{\partial t} \eta(x, y, t) \quad (\text{B.32})$$

$$p = 0 \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (\text{B.33})$$

Este problema lineal determina por completo  $\phi$  y  $\eta$ . Aplicamos (B.30) en la superficie, para esto remplazamos (B.33) en (B.30).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y, 0, t) + g\eta(x, y, t) = 0 \quad (\text{B.34})$$

Derivando (B.30) respecto al tiempo, aplicando  $\frac{\partial z}{\partial t} = w$  y remplazando (B.32) en este término

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x, y, 0, t) + g \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, 0, t) = 0 \quad (\text{B.35})$$

Veamos para (B.29) soluciones de la forma

$$\phi(x, y, z, t) = F(z) \sin(kx + ly - \omega t) \quad (\text{B.36})$$

donde  $k$  y  $l$  son constantes arbitrarias,  $F(z)$  ser determinada y  $\omega$  es una constante a determinar. Remplazando en (B.29)

$$\frac{d^2 F}{dz^2} = K^2 F \quad (\text{B.37})$$

La solución es de la forma

$$F(z) = C_1 \cosh(K(z + H_0)) + C_2 \sinh(k(z + H_0)) \quad (\text{B.38})$$

Remplazamos en  $\phi(x, y, z, t)$

$$\phi(x, y, z, t) = [C_1 \cosh(K(z + H_0)) + C_2 \sinh(k(z + H_0))] \sin(kx + ly - \omega t) \quad (\text{B.39})$$

y esto a su vez es aplicado en la condicion de frontera de fondo (B.31). Se tiene  $C_2 = 0$ .

$$\varphi(x, y, z, t) = [C_1 \cosh(K(z + H_0))] \sin(kx + ly - \omega t) \quad (B.40)$$

Finalmente al remplazar en (B.35) se ve que  $\omega$  cumple la relación

<p>Relacion de Dispersión</p> $\omega^2 = gK \tanh(KH_0)$	(B.41)
---	--------

Hallamos  $\eta$  remplazando  $\varphi$  en (B.34)

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, y, 0, t) = \frac{\omega C_1}{g} \cosh(KH_0) \cos(kx + ly - \omega t) \quad (B.42)$$

y con la velocidad potencial  $\varphi$ , calculamos  $\mathbf{u} = (u, v, w)$

$$u = kC_1 \cosh(K(z + H_0)) \cos(kx + ly - \omega t) \quad (B.43)$$

$$v = lC_1 \cosh(K(z + H_0)) \cos(kx + ly - \omega t) \quad (B.44)$$

$$w = KC_1 \sinh(K(z + H_0)) \sin(kx + ly - \omega t) \quad (B.45)$$

donde  $\mathbf{K} = (k, l)$  es el vector de onda, y su módulo es  $|\mathbf{K}| = K = \sqrt{k^2 + l^2}$ . La frecuencia angular está determinada por la relacion de dispersion

$$\omega = \sqrt{\frac{g|\mathbf{K}| \tanh(|\mathbf{K}| H_0)}{|\mathbf{K}|}} \quad (B.46)$$

con lo cual la rapidez de fase de la onda es

<p>Rapidez de Fase</p> $c = \frac{\omega}{ \mathbf{K} } = \sqrt{\frac{g}{ \mathbf{K} } \frac{\tanh( \mathbf{K}  H_0)}{ \mathbf{K} }}$	(B.47)
---	--------

## Apéndice C

### Aguas someras. Maremotos

En la ecuación hidrodinamica ideal (B.16), escribimos las componentes de la conservacion del momentum, donde la densidad constante es absorbida en la presion

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{C.1a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{C.1b})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (\text{C.1c})$$

y la conservacion de la masa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{C.1d})$$

En la condicion de aguas someras hay dos aproximaciones, la primera:

La aceleración en la vertical  $\partial w / \partial t$  se considera muy pequeña, y se omite.

Quedando de (C.1c)

Ecuacion Hidrostatica

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad (\text{C.2})$$

Integrando desde un punto  $(x, y, z)$  hasta un punto en la superficie  $(x, y, \eta(x, y))$ , siendo  $p = 0$  en la superficie

$$0 - p(x, y, z) = -g(\eta(x, y) - z) \quad (C.3)$$

con lo que la presión está determinada por el peso de la columna de líquido sobre el punto. Remplazando en las ecuaciones de conservación del momentum

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (C.4a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (C.4b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (C.4c)$$

La segunda aproximación:

Las componentes de la velocidad  $u$  y  $v$  son independientes de  $z$ .

Se dice que el movimiento del fluido es columnar.

## C.1. Condiciones de Frontera

La condición de frontera cinemática en el fondo indica que las partículas de fluido en el fondo  $z = -H$  deben permanecer en el fondo, el cual no es necesariamente plano  $H = H(x, y)$

$$\frac{d}{dt}(z - (-H)) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(z) = -\frac{d}{dt}(H)$$

aplicando la derivada lagrangiana

$$w \frac{\partial}{\partial z} z = -u \frac{\partial}{\partial x} H + v \frac{\partial}{\partial y} H$$

$$w = -u \frac{\partial}{\partial x} H + v \frac{\partial}{\partial y} H \quad \text{en} \quad z = -H(x, y) \quad (C.5)$$

La condicion de frontera cinemática en la superficie indica que las partículas de fluido en la superficie  $z = \eta(x, y, t)$  deben permanecer en la superficie

$$\frac{d}{dt}(z - \eta(x, y, t)) = 0$$

$$w \frac{\partial}{\partial z} z - \frac{d}{dt} \eta(x, y, t) = 0$$

$$w = \frac{\partial}{\partial t} \eta + u \frac{\partial}{\partial x} \eta + v \frac{\partial}{\partial y} \eta \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (C.6)$$

y la condicion de frontera dinámica en la superficie indica que la presión es constante y cero:  $P = 0$

$$p = 0 \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (C.7)$$

Integramos la conservación de la masa (C.4c) desde el fondo  $z = -H$  hasta la superficie  $z = \eta$

$$\int_{-H}^{\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0$$

$$\int_{-H}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{-H}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{-H}^{\eta} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0$$

aplicando la regla integral de Leibniz <sup>1</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-H}^{\eta} u dz - u_{(z=\eta)} \frac{\partial \eta}{\partial x} - u_{(z=-H)} \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{-H}^{\eta} v dz - v_{(z=\eta)} \frac{\partial \eta}{\partial y} - v_{(z=-H)} \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$+ w(x, y, \eta) - w(x, y, -H) = 0$$

reemplazando en  $w$  las condiciones de frontera cinemáticas de fondo y superficie se cancelan términos, quedando

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-H}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-H}^{\eta} v dz = 0 \quad (C.8)$$

<sup>1</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} U(x, z) dz = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} U(x, z) dz + U(x, b(x)) \frac{\partial b(x)}{\partial x} - U(x, a(x)) \frac{\partial a(x)}{\partial x}$$

definimos un flujo de descarga  $M$  y  $N$  y una velocidad promedio  $\bar{u}$  y  $\bar{v}$

$$M = \int_{-H}^{Z_\eta} u dz = \bar{u}(\eta + H) \quad (C.9)$$

$$N = \int_{-H}^{Z_\eta} v dz = \bar{v}(\eta + H) \quad (C.10)$$

y la conservacion de la masa junto con las condiciones de frontera nos dan

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} M + \frac{\partial}{\partial y} N = 0 \quad (C.11)$$

Integramos la conservacion del momentum (C.4a) y (C.4b) desde el fondo  $z = -H$  hasta la superficie  $z = \eta$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -g(\eta + H) \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (C.12)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -g(\eta + H) \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (C.13)$$

Finalmente tenemos las ecuaciones de aguas someras integradas

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} M + \frac{\partial}{\partial y} N = 0 \quad (C.14)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -g(\eta + H) \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (C.15)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -g(\eta + H) \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (C.16)$$

Las cuales resuelve el modelo numérico TUNAMI en coordenadas esféricas ([Goto y Ogawa, 1997](#))

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{R \cos \phi} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} M + \frac{\partial}{\partial \phi} (N \cos \phi) \right) = 0 \quad (C.17)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{g(\eta + H)}{R \cos \phi} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} \quad (C.18)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{g(\eta + H)}{R} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} \quad (C.19)$$

Donde  $R$  es el radio de la Tierra,  $\lambda$  es la coordenada longitud y  $\phi$  es la coordenada latitud. Para aguas someras la longitud de onda es grande comparada con la profundidad, es decir

$$\frac{\lambda}{H_0} \gg 1$$



$$\frac{1}{\tanh(|\mathbf{K}| H_0)} \approx \frac{1}{|\mathbf{K}| H_0} \quad (\text{C.20})$$

tenemos de (B.47)

$$c = \frac{\omega}{|\mathbf{K}|} = \frac{1}{g |\mathbf{K}|^{-1} \tanh(|\mathbf{K}| H_0)} \approx \frac{1}{g |\mathbf{K}|^{-1} (|\mathbf{K}| H_0)}$$

Rapidez de Fase en Aguas Someras

$$c = \frac{\omega}{|\mathbf{K}|} \approx \frac{1}{g H_0} \quad (\text{C.21})$$

## C.2. Aceleración de Coriolis

En cuanto a la Aceleración de Coriolis, tenemos la ecuación de momentum general (B.12) ([Pedlosky, 2003](#) y [Holton, 2004](#))

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \kappa \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (\text{C.22})$$

donde

$$D_a \mathbf{u} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} - \Omega^2 \mathbf{R} \quad (\text{C.23})$$

es llamada derivada temporal absoluta ([Holton, 2004](#)), es decir respecto de un sistema de referencia inercial.  $\boldsymbol{\Omega}$  es la velocidad angular de rotación de la Tierra. La fuerza centrífuga  $\Omega^2 \mathbf{R}$  se encuentra combinada en  $\rho \mathbf{g}$ .

El término de rotación de la Tierra  $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$  no se considera para el caso de las ondas gravitacionales de superficie, ahora veamos sus componentes. En coordenadas esféricas,  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$  determina la dirección este y norte sobre la superficie de la Tierra respectivamente, y  $\hat{z}$  determina la dirección radial, vertical. Siendo

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \hat{x} + \Omega \cos \phi \hat{y} + \Omega \sin \phi \hat{z}$$

$$\mathbf{u} = u \hat{x} + v \hat{y} + w \hat{z}$$

$$\mathbf{g} = -g \hat{z}$$

donde  $\phi$  es la latitud, las componentes de  $2\Omega \times \mathbf{u}$  son

$$(2\Omega \times \mathbf{u})_x = 2\Omega w \cos \phi - 2\Omega v \sin \phi \quad (\text{C.24a})$$

$$(2\Omega \times \mathbf{u})_y = 2\Omega u \sin \phi \quad (\text{C.24b})$$

$$(2\Omega \times \mathbf{u})_z = -2\Omega u \cos \phi \quad (\text{C.24c})$$

Las componentes de la ecuacion general (C.22), son las componentes de la ecuacion hidrodinámica ideal (B.16), más las componentes de  $2\Omega \times \mathbf{u}$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - 2\Omega w \cos \phi + 2\Omega v \sin \phi \quad (\text{C.25a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \phi \quad (\text{C.25b})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u \cos \phi - g \quad (\text{C.25c})$$

En la direccion  $\hat{x}$ , el orden de magnitud de  $w$  es  $10^{-3}$  veces el de  $v$  y también el de  $(\nabla p)_x$ , por lo cual se ignora el término que contiene  $w$ . En la direccion  $\hat{z}$ , el orden de magnitud de  $2\Omega u \cos \phi$  es  $10^{-4}$  veces el de  $(\nabla p)_z$  y también el de  $\rho g$ , por lo cual se ignora la componente  $(2\Omega \times \mathbf{u})_z$ . Nos queda

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \phi \quad (\text{C.26a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \phi \quad (\text{C.26b})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (\text{C.26c})$$

$f \equiv 2\Omega \sin \phi$  es el parámetro de Coriolis, proporcional al seno de la latitud<sup>2</sup>. Con

---

<sup>2</sup> Representamos la velocidad en la horizontal como  $\mathbf{V} = (u, v)$ . Con esto el término de rotacion de la Tierra en (C.22) tiene la forma

$$2\Omega \times \mathbf{u} = f \hat{z} \times \mathbf{V} \quad (\text{C.27})$$

$\hat{z}$  es un vector unitario en direccion radial (vertical).

esta notación las ecuaciones (C.26a), (C.26b) y (C.26c) quedan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + fv \quad (C.28a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} - fu \quad (C.28b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (C.28c)$$

y la conservacion de la masa mantiene su forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (C.28d)$$

Siguiendo las condiciones de frontera de aguas someras desarrolladas en C.1 tenemos las ecuaciones de aguas someras, con el término de Coriolis, integradas

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} M + \frac{\partial}{\partial y} N = 0 \quad (C.29)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = -g(\eta + H) \frac{\partial \eta}{\partial x} + fN \quad (C.30)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -g(\eta + H) \frac{\partial \eta}{\partial y} - fM \quad (C.31)$$

Las cuales, en coordenadas esféricas, resuelve el modelo numérico del presente trabajo.

# Apéndice D

## Esquema del modelado numérico

### D.1. Método de diferencias finitas

Iniciamos el tema con un ejemplo (Strikwerda, 2004). Definimos una grilla de puntos en el plano  $(t, x)$ . Sean  $h$  y  $k$  números positivos, la grilla será los puntos  $(t_n, x_m) = (nk, mh)$  para enteros arbitrarios  $n$  y  $m$ . Para una función  $v$  definida sobre la grilla escribimos  $v_m^n$  para valores de  $v$  en el punto  $(t_n, x_m)$ . También usamos la notación  $u_m^n$  para  $u(t_n, x_m)$  donde  $u$  está definida en  $(t, x)$ . El conjunto de puntos  $(t_n, x_m)$  para un valor fijo de  $n$  es llamado nivel de grilla  $n$ . El interés es en valores pequeños de  $h$  y  $k$ , los cuales también son representados como  $\Delta x$  y  $\Delta t$  respectivamente. La idea de las diferencias finitas es reemplazar las derivadas por diferencias. Hay muchas formas, por ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_m) &\approx \frac{u(t_n + k, x_m) - u(t_n, x_m)}{k} \\ &\approx \frac{u(t_n + k, x_m) - u(t_n - k, x_m)}{2k} \end{aligned} \quad (D.1)$$

Vemos que son aproximaciones válidas al ver las formulas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(t + \varepsilon, x) - u(t, x)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(t + \varepsilon, x) - u(t - \varepsilon, x)}{2\varepsilon} \end{aligned} \quad (D.2)$$

que relacionan la derivada a los valores de  $u$ . Formulas similares aproximan las derivadas respecto a  $x$ . Por ejemplo para la siguiente ecuación <sup>1</sup>

$$u_t + au_x = 0 \quad (D.3)$$

---

1

usando estas aproximaciones obtenemos los siguientes esquemas de diferencias finitas:

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = 0 \quad (D.4)$$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0 \quad (D.5)$$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0 \quad (D.6)$$

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0 \quad (D.7)$$

Al esquema (D.4) nos referimos como el esquema hacia adelante en el tiempo y hacia adelante en el espacio, de manera similar (D.5) es adelante en el tiempo y hacia atrás en el espacio, (D.6) es adelante en el tiempo y centrado en el espacio. EL esquema (D.7) es llamado el esquema leapfrog.

---

nemos

$$u_t + au_x = 0$$

donde  $a$  es una constante,  $t$  representa el tiempo, y  $x$  representa la variable espacial. El subíndice denota la diferenciación, por ejemplo  $u_t = \partial u / \partial t$ . Asignamos  $u(t, x)$  en un tiempo inicial, que tomamos como 0,  $u_0(x)$  para todos los números reales  $x$ , y deseamos determinar los valores de  $u(t, x)$  para valores positivos de  $t$ . Esto es llamado un problema de valor inicial.

Por inspeccion observamos que la solución es

$$u(t, x) = u_0(x - at)$$

de hecho se puede probar que es la única solución.

La solución nos dice dos cosas. Primero, la solución en cualquier tiempo  $t_0$  es una copia de la función original, pero desplazada a la derecha, si  $a$  es positivo o hacia la izquierda si  $a$  es negativo, una cantidad  $|a|t_0$ . Otra forma de decirlo es que la solución en  $(t, x)$  depende solo de los valores de  $\xi = x - at$ . Las líneas en el plano  $(t, x)$  donde  $x - at$  es constante son llamadas características. El parámetro  $a$  es llamado la rapidez de propagación a lo largo de la característica. Así la solución de nuestra ecuación hiperbólica se puede considerar una onda con rapidez  $a$  sin cambio de forma.

Segundo, mientras que la ecuación diferencial parcial hiperbólica tiene sentido solo si es diferenciable, la solución no requiere ser diferenciable en  $u_0$ . En general se permiten soluciones discontinuas para problemas hiperbólicos.

## D.2. Consistencia

Veamos cuan bien se aproxima un esquema, por ejemplo

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + a \frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{\Delta x} = 0 \quad (D.8)$$

a la solución de la ecuación diferencial parcial

$$v_t + av_x = 0 \quad (D.9)$$

Para llegar al esquema de diferencias (D.8), se ha usado la aproximación

$$v(n\Delta t, k\Delta x) \approx \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t}$$

usando la expansión de Taylor vemos que

$$\begin{aligned} v_k^{n+1} = v(k\Delta x, (n+1)\Delta t) &= v(k\Delta x, n\Delta t) + \frac{\partial v}{\partial t}(k\Delta x, n\Delta t) \frac{\Delta t}{1!} \\ &+ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(k\Delta x, n\Delta t) \frac{\Delta t^2}{2!} + \dots \end{aligned} \quad (D.10)$$

con esto

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial t}(k\Delta x, n\Delta t) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \bigg|_k + \dots \quad (D.11)$$

generalmente se escribe con la notación  $O$

$$\frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial t}(k\Delta x, n\Delta t) + O(\Delta t) \quad (D.12)$$

Donde  $O(\Delta t)$  es una cantidad finita que representa lo que no estamos considerando al reemplazar  $v_t$  por  $\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t}$ . Con el mismo procedimiento puede mostrarse que

$$\frac{v_{k+1}^n - v_k^n}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x}(k\Delta x, n\Delta t) + O(\Delta x) \quad (D.13)$$

Regresando a la ecuación (D.9), vemos que: el esquema de diferencias aproxima a la ecuación diferencial parcial

$$v_t + av_x = \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} + a \frac{v_{k+1}^n - v_k^n}{\Delta x} + O(\Delta t) + O(\Delta x) \quad (D.14)$$

Esto no indica cuan bien la solución de la ecuación de diferencias se aproxima a la solución de la ecuación diferencial parcial. Esto se verá luego, lo que hasta este punto se puede decir es que la solución del esquema de diferencias en general se aproximará a la solución de la ecuación diferencial parcial en el mismo orden que el esquema de diferencias aproxima a la ecuación diferencial parcial.

### D.3. Convergencia

Los esquemas de diferencias finitas como los mostrados (Thomas, 1995), se utilizan por aproximarse a las soluciones de determinadas ecuaciones diferenciales parciales. Lo que se busca es que esta aproximación sea al nivel de precisión que se elija. Consideremos la ecuación diferencial parcial

$$Lv = F \quad (D.15)$$

donde las funciones  $v$  y  $F$  están definidas en todos los reales y con la condición inicial  $v(x, 0) = f(x)$ . Asumimos que obtenemos una solución aproximada (a partir de un esquema de diferencias finitas que designamos como  $L_k^n$ , donde  $n$  corresponde al escalón de tiempo y  $k$  al punto espacial de la grilla) al problema,  $u_k^n$  el cual está definido en una grilla (con un espaciado en las grillas de  $\Delta x$  y  $\Delta t$ ) y se satisface la condición inicial  $u_k^0 = f(k \Delta x)$ ,  $k = -\infty, \dots, \infty$ . Sea  $v$  la solución exacta a nuestro problema de valor inicial. Entonces podemos definir:

**Definición 1. Convergencia** Un esquema de diferencias  $L_k^n u_k^n = G_k^n$  que se aproxima a la ecuación diferencial  $Lv = F$  es un esquema convergente adecuado si para cualquier  $x$  y  $t$ , mientras  $(k \Delta x, (n+1)\Delta t)$  converge a  $(x, t)$ ,  $u_k^n$  converge a  $v(x, t)$  mientras  $\Delta x$  y  $\Delta t$  convergen a 0.

Sea  $u^n = (\dots, u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, \dots)$  y  $v^n = (\dots, v_{-1}^n, v_0^n, v_1^n, \dots)$ , donde  $v^n$  es el vector de los valores de la solución evaluada en los puntos de la grilla,  $v(k \Delta x, n\Delta t)$ . Damos una definición en términos de la norma de la diferencia entre la solución de la ecuación diferencial parcial y la solución de la ecuación de diferencias.

**Definición 2. Convergencia** Un esquema de diferencias  $L_k^n u_k^n = G_k^n$  aproximándose a la ecuación diferencial parcial  $Lv = F$  es un esquema convergente en el tiempo  $t$  si, conforme  $(n+1)\Delta t \rightarrow t$ ,

$$u^{n+1} - v^{n+1} \rightarrow 0 \quad (D.16)$$

mientras  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$

Discutimos cuán rápido la solución de la ecuación de diferencias converge a la solución de la ecuación diferencial parcial, definiendo el orden de convergencia  $(p, q)$  como sigue

**Definicion. Orden de convergencia** Un esquema de diferencias  $L_k^n u_k^n = G_k^n$  aproximandose a la ecuación diferencial parcial  $Lv = F$  es un esquema convergente de orden  $(p, q)$  si para todo  $t$ , conforme  $(n + 1)\Delta t$  converge a  $t$ ,

$$u^{n+1} - v^{n+1} = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q) \quad (D.17)$$

mientras  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Recordar que  $O$  involucra una constante, es la forma breve de decir: hay una constante  $C$  tal que  $\|u^{n+1} - v^{n+1}\| \leq C(\Delta x^p + \Delta t^q)$ .

## D.4. Estabilidad

Si escribimos el esquema de diferencias como (asumiendo que trabajamos con un esquema de dos niveles <sup>2</sup> y una ecuación diferencial parcial de primer orden respecto a  $t$ )

$$u^{n+1} = Qu^n + \Delta t G^n \quad (D.18)$$

donde

$$u^n = (\dots, u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, \dots)$$

$$G^n = (\dots, G_{-1}^n, G_0^n, G_1^n, \dots)$$

y  $Q$  es un operador actuando en el espacio apropiado, definimos la consistencia.

**Definicion. Consistencia** Un esquema de diferencias (D.18) es consistente, en una norma <sup>3</sup>, con la ecuación diferencial parcial si la solución de la ecuación diferencial parcial  $v$  satisface

$$v^{n+1} = Qv^n + \Delta t G^n + \Delta t \tau^n \quad (D.24)$$

<sup>2</sup>Dos niveles de tiempo, en este caso  $n + 1$  y  $n$

<sup>3</sup> cuando trabajamos con espacios de dimensiones finitas usamos ya sea el espacio Euclidiano real  $R^N$  o el espacio Euclidiano complejo  $C^N$ , para algún  $N$ . En el espacio dimensional finito la norma es la norma Euclidiana

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^N |u_k|^2} \quad (D.19)$$

En espacios secuenciales de dimensiones infinitas usamos el espacio real y complejo  $\ell_2$

$$\ell_2 = \left\{ u = (\dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots) : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2 < \infty \right\} \quad (D.20)$$

con norma

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2} \quad (D.21)$$

Finalmente, cuando tomemos transformadas, utilizamos el espacio lineal infinito de valores comple-



y

$$\|\tau^n\| \rightarrow 0 \quad (D.25)$$

mientras  $\Delta x \rightarrow 0$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ , donde  $v^n$  denota el vector cuya componente  $k$ -ésima es  $v(k\Delta x, n\Delta t)$ .

**Definición. Orden de precisión** El esquema de diferencias (D.18) se dice que es de precisión de orden  $(p, q)$  respecto de la ecuación diferencial parcial dada si

$$\|\tau^n\| = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q) \quad (D.26)$$

Nos referimos a  $\tau^n$  como el error de truncamiento.

**Definición. Estabilidad** Un esquema de diferencias de dos niveles

$$u^{n+1} = Qu^n, n \geq 0 \quad (D.27)$$

se dice que es estable con respecto a la norma  $\|\cdot\|$ , si existen constantes positivas  $\Delta x_0$  y  $\Delta t_0$ , y constantes no negativas  $K$  y  $\beta$  tal que

$$u^{n+1} \leq K \exp(\beta t) u^0 \quad (D.28)$$

para  $0 \leq t = (n+1)\Delta t, 0 < \Delta x \leq \Delta x_0$  y  $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$

Notemos que la estabilidad permite a la solución crecer. Se debe notar que la solución puede crecer con el tiempo, no con el número de pasos de tiempo. Se ha definido la estabilidad para esquemas de diferencias homogéneos, la cual se utiliza para probar la estabilidad del esquema de diferencias nohomogéneo al cual está asociado.

**Teorema de equivalencia de Lax** Un esquema de diferencias de dos niveles consistente para un problema de valor inicial bien planteado es convergente si y solo si este es estable.

—  
jos, funciones cuadrado integrables de Lebesgue,  $L_2(\mathbb{R})$

$$L_2(\mathbb{R}) = \{v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2 dx < \infty\} \quad (D.22)$$

con norma

$$\|v\|_2 = \left( \int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \quad (D.23)$$

En todos los casos en adelante puede omitirse el subíndice 2 de la norma.

Teorema de Lax Si un esquema de diferencias de dos niveles

$$\mathbf{u}^{n+1} = Q\mathbf{u}^n + \Delta t G^n$$

es de orden de precision  $(p, q)$  en la norma  $\|\cdot\|$  para un problema de valor inicial con frontera bien planteado que es estable respecto a la norma  $\|\cdot\|$ , entonces es convergente de orden  $(p, q)$  con respecto a la norma  $\|\cdot\|$ .

Un problema de valor inicial est bien planteado si depende continuamente de sus condiciones iniciales.

## D.5. Análisis de estabilidad

Sea el problema de valor inicial

$$v_t = v_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (D.29)$$

$$v(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (D.30)$$

definimos la Transformada de Fourier discreta para nuestra solución del esquema de diferencias correspondiente  $u$ :

Transformada de Fourier discreta la transformada de Fourier de  $u$  en  $\mathbb{Z}$  es una funcion  $\hat{u}$  en  $L_2[-\pi, \pi]$  definida por

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\xi} u_m \quad (D.31)$$

para  $\xi \in [-\pi, \pi]$ .

Regresamos de este espacio de funciones transformadas con

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\xi} \hat{u}(\xi) d\xi \quad (D.32)$$

Es importante la identidad de Parseval

$$\|\hat{u}\|_2 = \|u\|_2 \quad (D.33)$$

donde la primera norma es la norma  $L_2$  en  $\xi \in [-\pi, \pi]$  y la segunda es la norma  $\mathbb{Z}$ .

Con esto y otras consideraciones se puede mostrar que: la secuencia  $\{u^n\}$  es estable si y solo si la secuencia  $\{\hat{u}^n\}$  es estable en el espacio transformado  $L_2([-\pi, \pi])$ . Es por este resultado que de encontrar la estabilidad en el espacio de las funciones transformadas no es necesario regresar a la ecuación original. Este aspecto de la transformada de Fourier discreta da facilidad en el análisis de estabilidad a diferencia del caso continuo.

Criterio de estabilidad discreto de Von Neumann Consideremos una expresión discreta de Fourier de la forma

$$u_k^m = \xi^m e^{ijk\pi\Delta x} \quad (D.34)$$

donde  $0 \leq j \leq M$  y el exponente de  $\xi$  es un exponente multiplicativo. Si reemplazamos este modo general de Fourier en un esquema de diferencias obtenemos una expresión de la forma

$$u_k^{n+1} = \xi \xi^n e^{ijk\pi\Delta x} = \xi^n f(r) e^{ijk\pi\Delta x} \quad (D.35)$$

quedando

$$\xi = f(r = \Delta x / \Delta t) \quad (D.36)$$

y la condición necesaria para la estabilidad se obtiene poniendo restricciones a  $r$  de manera que  $|\xi| \leq 1$ , evitando así que el término  $\xi^n$  crezca sin límites. Con esto vemos que el criterio discreto de Von Neumann es la condición que restringe un crecimiento sin límites de los coeficientes de Fourier finitos para cualquier modo.

## D.6. Ecuaciones hiperbólicas

Discutiremos la estabilidad del esquema de diferencias FTFS (hacia adelante en el tiempo, hacia adelante en el espacio) (D.8)

$$u_k^{n+1} = u_k^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k+1}^n - u_k^n) \quad (D.37)$$

En la sección D.2 se mostró que el esquema de diferencias es consistente con la ecuación diferencial parcial  $v_t + av_x = 0$ . Reescribimos el esquema con  $R = a\Delta t / \Delta x$ , para  $a < 0$ ,

$$u_k^{n+1} = (1 + R)u_k^n - Ru_{k+1}^n \quad (D.38)$$

Se muestra que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k^{n+1}|^2 \leq (|1 + R| + |R|)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k^n|^2 \quad (D.39)$$

en términos de la norma  $\| \cdot \|_2$

$$\|u^{n+1}\|_2 \leq K_1 \|u^n\|_2 \quad (D.40)$$

donde  $K_1 = |1 + R| + |R|$ . Aplicando este proceso  $n$  veces más tenemos

$$\|u^{n+1}\|_2 \leq K_1^n \|u^0\|_2 \quad (D.41)$$

Para la estabilidad debemos encontrar un  $K$  tal que

$$(|1 + R| + |R|)^{n+1} \leq K \quad (D.42)$$

en este caso, elegimos  $K = 1$ , y ya que  $R = a\Delta t/\Delta x \leq 0$ , se llega a  $-1 \leq R \leq 0$ .

Con esto se ha provado que el esquema (D.37) es condicionalmente estable con respecto

a la norma. Específicamente encontramos que la condicion de estabilidad est dada por  $-1 \leq R \leq 0$ , or  $-1 \leq a\Delta t/\Delta x \leq 0$ .

Si  $|R| = |a| \Delta t/\Delta x \leq 1$ , el esquema de diferencias (D.37) es estable y consistente con la ecuacion diferencial parcial  $v_t + av_x = 0$ , y por tanto, convergente.

## D.7. La condicion de Courant-Friedrichs-Lewy

La propiedad única de las ecuaciones hiperbolicas es que debido a la rapidez finita de propagacion, la solucion tiene un dominio finito de dependencia. Si consideramos el problema

$$v_t + av_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (D.43)$$

$$v(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (D.44)$$

con  $a > 0$ , sabemos que la solución en el punto  $(x, y)$  depende solo de los valores de  $f$  en el punto  $x_0$  donde  $x_0 = x - at$ . El punto  $x_0$  es llamado el dominio de dependencia del punto  $(x, y)$ . El dominio de dependencia del punto  $(x, y)$  es el conjunto de puntos de los cuales el punto  $(x, y)$  es dependiente.

En el caso numérico, la solucion en un punto  $(k\Delta x, (n+1)\Delta t)$  depende de los valores de puntos que se encuentren un nivel de tiempo abajo, dependiendo del esquema. Al seguir descendiendo en los niveles de tiempo hasta alcanzar el nivel de tiempo cero, encontraremos un conjunto de puntos  $D_n$  de los cuales depende la solución en  $(k\Delta x, (n+1)\Delta t)$ . Definimos el dominio numérico de dependencia del punto  $(k\Delta x, (n+1)\Delta t)$ , para un esquema numérico determinado, como el intervalo  $D_n$ .

**Definicion.** Una ecuacion diferencial parcial y un esquema de diferencias asociado se dice que satisfacen la condición Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) si el dominio analítico de dependencia  $D_a$ , est contenido en el dominio numérico de dependencia,  $D_n$ .

**Teorema** Satisfacer la condición CFL es una condicion necesaria para la convergencia.

La condicon CFL es necesaria pero no suficiente, un esquema puede ser ridículo y satisfacer la condición CFL. Esta condición debe usarse cuando sea lo mejor que se pueda hacer en un determinado caso, cuando ya se ha establecido una posible convergencia. En cambio, la condición de von Neumann es una condicon necesaria y suficiente para la convergencia.

**Teorema** No hay esquema de diferencias explícito, consistente e incondicionalmente estable para resolver una ecuacion diferencial parcial hiperbolica.

## D.8. Ecuaciones hiprebolicas bidimensionales

Como modelo usamos la ecuación escalar

$$v_t + av_x + bv_y = 0 \quad (D.45)$$

con la condicon inicial

$$v(x, y, 0) = f(x, y) \quad (D.46)$$

La solucion esta dada por  $v(x, y, t) = f(x - at, y - bt)$ . Así como el caso unidimensional la solucion consiste en trasladar la condicon inicial en la direccion apropiada. La rapidez de propagación en la direccion x es a, y en la dirección y es b.

Sea el esquema de diferencias

$$u_{jk}^{n+1} = (1 - R_x(u_{jk}^n - u_{j-1,k}^n) - R_y(u_{jk}^n - u_{j,k-1}^n))u_{jk}^n \quad (D.47)$$

donde  $R_x = a\Delta t/\Delta x$  y  $R_y = b\Delta t/\Delta y$ . Siguiendo un análisis similar al caso unidimensional encontramos que la condición CFL es una condición necesaria para la convergencia. Para nuestro esquema de diferencias la condicon CFL se cumple si

$$0 \leq R_x \leq 1 \quad y \quad 0 \leq R_y \leq 1 \quad (D.48)$$

es decir

$$\max \{|R_x|, |R_y|\} \leq 1 \quad (D.49)$$

## D.9. Dispersión

Al resolver  $v_t + av_x = 0$  con el esquema (D.37) con  $\Delta x = 0,01$  y  $\Delta x = 0,0001$  cumpliendo que  $|R| = 0,8$  para niveles de tiempo cercanos a 10, vemos que la solucion con  $\Delta x = 0,0001$  es más suave y en ambos casos se ve un amortiguamiento de la solución. Si aumentamos los niveles de tiempo para la solucion numérica, el amortiguamiento es aún mas notorio y hasta puede llegar a un valor constante. Este error es debido a la disipacion o la dispersión.

### D.9.1. Dispersión y disipación en ecuaciones diferenciales parciales

Al resolver ecuaciones diferenciales parciales vemos que dependen de un término de la forma

$$v(x, t) = \hat{v}e^{i(\omega t + \beta x)} = \hat{v}e^{i\omega t}e^{i\beta x} \quad (D.50)$$

Este término describe una onda en el espacio y tiempo. La frecuencia angular de la onda es  $\omega$ , el número de onda es  $\beta$  y se relaciona con la longitud de onda  $\lambda$  mediante  $\lambda = 2\pi/\beta$ .

Si consideramos la solución en las siguientes ecuaciones

$$v_t = \gamma v_{xx} \quad (D.51)$$

$$v_t + av_x = 0 \quad (D.52)$$

vemos que la función (D.50) no se puede satisfacer sin una relación entre  $\omega$  y  $\beta$ . Esta relación se escribe  $\omega = \omega(\beta)$  y es llamada relación de dispersión (veremos que es más lógico llamarla relación de dispersión-disipación). Si por ejemplo reemplazamos (D.50) en (D.51), vemos que  $v$  es una solución si  $\omega = i\gamma\beta^2$ . Si reemplazamos (D.50) en (D.52), vemos que  $v$  es una solución si  $\omega = -a\beta$ . En general existe una relación de dispersión entre  $\omega$  y  $\beta$  para que la expresión (D.50) satisfaga una ecuación diferencial parcial.

Si consideramos (D.51) la solución es

$$v(x, t) = \hat{v}e^{-\gamma\beta^2 t}e^{i\beta x} \quad (D.53)$$

Vemos que la onda no se mueve y decae con el tiempo. Cuando  $\omega$  es imaginario, la solución o bien crece o decae. Este es el caso de las ecuaciones parabólicas.

Si consideramos (D.52) la solución es

$$v(x, t) = \hat{v}e^{i\beta(x-at)} \quad (D.54)$$

En general vemos que cuando  $\omega$  es real, el modo se propaga con rapidez  $-\omega/\beta$  y no decae la amplitud. Notamos que cuando  $\omega$  es lineal, la rapidez de propagación es independiente de la frecuencia.

Una de las formas de analizar una ecuación de diferencias la cual buscamos aproximar a la solución de una determinada ecuación diferencial, es ver cuán bien el decaimiento de los modos de Fourier de la ecuación de diferencias se corresponden con los modos de la ecuación diferencial parcial.

Un esquema es inestable, si alguno de los modos de Fourier crece sin límites. Definimos la disipación de una solución de una ecuación diferencial parcial, en el caso de que los modos de Fourier no crecen con el tiempo y al menos uno de los modos decae. Una ecuación diferencial es no disipativa si los modos de Fourier no decaen ni crecen. Definimos la dispersión de una solución de una ecuación diferencial parcial cuando los modos de Fourier de diferentes longitudes de onda (o números de onda) se propagan a diferentes rapidezces.

### D.9.2. Dispersión y disipación en ecuaciones de diferencias

Consideramos el modo de Fourier discreto, análogo a (D.50),

$$u_k^n = \hat{u} e^{i(\omega(n\Delta t) + \beta(k\Delta x))} \quad (D.55)$$

$\omega(\beta)$  es llamada relación de dispersión discreta. Notamos que si consideramos la transformada de Fourier discreta, el término  $e^{i\beta k\Delta x}$  de (D.55) se corresponde con  $e^{ik\xi}$ . Así, considerando  $0 \leq \beta\Delta x \leq \pi$  obtenemos información de los modos presentes en la representación con la transformada de Fourier finita de la solución.

En general la relación de dispersión  $\omega = \omega(\beta)$  será compleja, por lo que es conveniente establecer  $\omega = \alpha + ib$ , donde  $\alpha = \alpha(\beta)$  y  $b = b(\beta)$  se asumen reales. Si insertamos  $\omega = \alpha + ib$  en (D.55) tenemos la forma

$$\begin{aligned} u_k^n &= \hat{u} e^{i(\alpha(n\Delta t) + ib(n\Delta t) + \beta(k\Delta x))} \\ u_k^n &= \hat{u} (e^{-b\Delta t})^n e^{i\beta[k\Delta x - (-\alpha/\beta)n\Delta t]} \end{aligned} \quad (D.56)$$

Aquí notamos que:

- Si  $b > 0$  para algún  $\beta$ , entonces la ecuación de diferencias asociada es disipativa.
- Si  $b < 0$  para algún  $\beta$ , entonces la solución del esquema crecerá sin límites (y el esquema será inestable).
- Si  $b = 0$  para todo  $\beta$ , el esquema será no disipativo.

también

- Si  $\alpha = 0$  para todo  $\beta$ , no habrá propagación de onda.
- Si  $\alpha = 0$  para algún  $\beta$ , habrá propagación de onda con rapidez  $-\alpha/\beta$ .
- Si  $-\alpha/\beta$  es una función no trivial de  $\beta$ , el esquema será dispersivo.

Disipacion y dispersion del esquema FTFS Veamos el esquema (D.37)

$$u_k^{n+1} = u_k^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{k+1}^n - u_k^n) \quad (D.57)$$

donde tomamos  $R = a\Delta t/\Delta x$  y  $a < 0$ . Si remplazamos (D.55) y damos forma obtenemos

$$e^{i\omega\Delta t} = e^{i\alpha\Delta t} e^{ib\Delta t} = 1 + R - R \cos \beta\Delta x - iR \sin \beta\Delta x \quad (D.58)$$

Disipacion:

$$e^{-b\Delta t} = \frac{1}{(1 + R)^2 - 2R(1 + R)\cos\beta\Delta x + R^2} \quad (D.59)$$

Para  $|R| < 1$  notamos que los modos  $\beta = 0$  decaen y los  $\beta \neq 0$  no decaen ni crecen. Por tanto el esquema es disipativo.

Dispersión: Dividiendo  $e^{i\omega\Delta t}$  entre  $e^{-b\Delta t}$  se tiene una expresión para  $e^{i\alpha\Delta t}$  y de aquí resulta

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta t} \arctan \frac{R \sin \beta\Delta x}{1 + R - R \cos \beta\Delta x}$$

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta t} \arctan \frac{R \sin \beta\Delta x}{1 + 2R \sin^2(\beta\Delta x/2)} \quad (D.60)$$

ya que  $\alpha$  es no lineal, el esquema de diferencias es dispersivo.

Esquema Leapfrog El esquema de leapfrog para la ecuacion diferencial parcial

$$v_t + av_x = 0$$

es de la forma

$$u_k^{n+1} = u_k^{n-1} - R(u_{k+1}^n - u_{k-1}^n) \quad (D.61)$$

En los esquemas de tres niveles se construye un sistema de ecuaciones y se cumple el criterio de estabilidad discreto de Von Neumann si el autovalor  $\lambda$  de la matriz de amplificacion cumple  $|\lambda| \leq 1$ . En el esquema (D.61) se tiene

$$\lambda_{\pm} = \pm \frac{1}{1 - R^2 \sin^2 \xi} - iR \sin \xi \quad (D.62)$$

donde  $\xi$  es la variable de la transformada de Fourier. Vemos que cuando  $R^2 \leq 1$ , se cumple  $1 - R^2 \sin^2 \xi \geq 0$  y  $|\lambda_{\pm}| = 1$  satisfaciéndose así el criterio de estabilidad discreto de Von Neumann.

Disipacion: Usando los modos de Fourier se encuentra que el esquema de



Leapfrog es uno de los pocos esquemas que propaga la forma de la onda sin disipacion.

**Dispersión:** El estudio de la dispersion depender del esquema. En el caso de TUNAMI, la dispersión del esquema de Leapfrog remplaza la dispersión física para una eleccion adecuada del grillado espacial ([Goto y Ogawa, 1997](#)). Esta equivalencia requiere un incremento del grillado espacial conforme la propagacion se mantiene en batimetrías profundas (el caso transoceanico). En el presente trabajo el grillado es constante por lo cual la equivalencia se estaría perdiendo conforme la propagacion se hace transoceánica.

## Apéndice E

### Implementación de la aceleración de Coriolis

En las ecuaciones (C.29), (C.30) y (C.31) el término  $\eta + H \approx H$  y se escriben en coordenadas esféricas como (ver las ecuaciones (C.17), (C.18) y (C.19)):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} M + \frac{\partial}{\partial \phi} (N \cos \phi) = 0 \quad (\text{E.1})$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{-gH}{R \cos \phi} \frac{\partial \eta}{\partial \lambda} + fN \quad (\text{E.2})$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{-gH}{R} \frac{\partial \eta}{\partial \phi} - fM \quad (\text{E.3})$$

con  $f = 2\Omega \sin \phi$ , siendo  $\phi$  la latitud. En términos generales, formamos el esquema de diferencias finitas con los siguientes pasos:

- Consideramos en el dominio de discretización  $\lambda = i\Delta\lambda$ ,  $\phi = j\Delta\phi$  y  $t = n\Delta t$ .
- $M$  es derivado respecto a  $\lambda$  y no respecto a  $\phi$ . La derivada se representa con las diferencias hacia adelante entre puntos que distan  $\Delta\lambda$ . Este dominio  $i$  se hace desfazar  $i + 1/2$ . Teniéndose el esquema para la derivada

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda} = \frac{M_{i+1/2} - M_{i-1/2}}{\Delta\lambda}$$

- $N$  es derivado respecto a  $\phi$  y no respecto a  $\lambda$ . La derivada se representa con las diferencias hacia adelante entre puntos que distan  $\Delta\phi$ . Este dominio  $j$  se hace desfazar  $j + 1/2$ . Teniéndose el esquema para la derivada

$$\frac{\partial N}{\partial \phi} = \frac{N_{j+1/2} - N_{j-1/2}}{\Delta\phi}$$

- Con lo anterior  $\eta_{i,j}$  mantiene los valores de  $M_{i-1/2,j}$  y  $M_{i+1/2,j}$  a sus lados en la direccion  $\lambda$ , y los valores  $N_{i,j+1/2}$  y  $N_{i,j-1/2}$  a sus lados en la direccion  $\phi$ . Así los valores  $\eta$  estan distanciados  $i/2$  en cada coordenada con  $M$  y  $N$ .
- El desfase de  $n/2$  en los niveles de tiempo para la derivada temporal, corresponde al esquema de Leapfrog (D.61).
- Los términos  $\cos \phi$  y  $\sin \phi$  son asignados según la latitud  $\phi_j$  en la que se encuentren.
- En (E.2),  $N$  se toma como  $N = \frac{1}{4} N_{i+1,j+1/2} + N_{i+1,j-1/2} + N_{i,j+1/2} + N_{i,j-1/2}$ . Lo que corresponde al promedio de los valores de  $N$  que están cercanos a  $M_{i+1/2,j}$ . Pues  $fN$  se encuentra en la derivada temporal de  $M$ .
- En (E.3),  $M$  se toma como  $M = \frac{1}{4} M_{i-1/2,j} + M_{i-1/2,j+1} + M_{i+1/2,j} + M_{i+1/2,j+1}$ . Lo que corresponde al promedio de los valores de  $M$  que estan cercanos a  $N_{i,j+1/2}$ . Pues  $fM$  se encuentra en la derivada temporal de  $N$ .

Estos esquemas de diferencias finitas son implementados como subrutinas en los codigos de programacion del modelo numérico.

# Referencias

- [1] Abraimi, R. (2014). Modelling the 2010 Chilean Tsunami using the H2Ocean unstructured mesh model. Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Católica de Chile.
- [2] Aki, K. (1966). Generation and propagation of G waves from the Niigata earthquake of June 16, 1964. Part 2. Estimation of earthquake moment, released energy, and stress-strain drop from the G wave spectrum. Bull. Earthquake Res. Inst. 44, pp 73-88.
- [3] Arnott, R. (2010). Introduction to Coastal Processes and Geomorphology. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
- [4] Cushman, B. y Beckers, J. (2009). Introduction to Geophysical Fluid Dynamics. Academic Press.
- [5] Dao, M. y Tkalic, P. (2007). Tsunami propagation modelling a sensitivity study. Natural Hazards and Earth System Sciences, vol 4, pp 741-754.
- [6] Diniz, P. et al (2010). Digital Signal Processing, system analysis and design. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
- [7] Fujii, Y. y Satake, K. (2012). Slip Distribution and Seismic Moment of the 2010 and 1960 Chilean Earthquakes Inferred from Tsunami Waveforms and Coastal Geodetic Data. Pure and Applied Geophysics. DOI 10.1007/s00024-012-0524-2.
- [8] Goto y Ogawa, (1997). Numerical Method of Tsunami simulation with the leap-frog scheme. UNESCO.
- [9] Holton, J. (2004). An Introduction to Dynamic Meteorology. USA. ELSEVIER.
- [10] Imamura, F. y Shuto, N. (1989). Numerical Simulation of the 1960 Chilean Tsunami. Proceedings of the Japan-China Joint Seminar on Natural Hazard Mitigation, Kyoto, Japan, pp 515-524.

- [11] Jiménez, C. (2015). El Maremoto notable de 1746. Tesis de Maestría, UNMSM, Perú.
- [12] Kowalik, Z. y Murty, T. (1989). On some future tsunamis in the Pacific Ocean. Natural Hazards, vol 1, issue 4, pp 349-369.
- [13] Lay, T. y Wallace, T. (1995). Modern Global Seismology. USA. ACADEMIC PRESS.
- [14] Levin, B. y Nosov, M. (2009). Physics of Tsunamis. Netherlands SPRINGER.
- [15] Maruyama, T. (1964). Statical Elastic Dislocations in an Infinite and Semi-Infinite Medium. Bulletin of the Earthquake Research Institute Vol. 42, N°2, pp 289-368.
- [16] Okada, Y. (1992). Internal deformation due to shear and tensile faults in a half space. Bulletin of Seismological Society of America Vol. 82, N°2, pp 1018-1040.
- [17] Organización Panamericana de la Salud, (2010). El terremoto y tsunami del 27 de febrero en Chile. Cronica y lecciones aprendidas en el sector salud. Organización Panamericana de la Salud.
- [18] Pedlosky, J. (2003). Waves in the Ocean and Atmosphere. Introduction to Wave Dynamics. USA. SPRINGER.
- [19] Salmon, R. (2016). Introduction to ocean waves. Textbook, Scripps Institution of Oceanography University of California, San Diego.
- [20] Schoenstadt, A. (2005). An introduction to Fourier Analysis, fourier series, partial differential equations and fourier transforms. Departmet of Applied Mathematics Naval Postgraduate school. Monterey California 93943.
- [21] Shearer, P. (2009). An Introduction to Seismology. USA. CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.
- [22] Steketee, J. A. (1958). On Volterra's dislocation in a semi-infinite elastic medium. J. Phys. 36 pp 192-205.
- [23] Strikwerda, J. C. (2004). Finite differences schemes and partial differential equations. USA. SIAM.

- [24] Talandier, J. (1993). French Polynesia Tsunami Warning Center (CPPT). Natural Hazards and Earth System Sciences, vol 7, p. 237-256.
- [25] Thomas, J. W. (1995). Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. USA. Springer.
- [26] Volterra, V. (1907). Sur l' équilibre des corps élastiques multiplement connexes. Ann. Éc. Norm.(3),24,401-517.
- [27] [www.ndbc.noaa.gov/station\\_page](http://www.ndbc.noaa.gov/station_page).